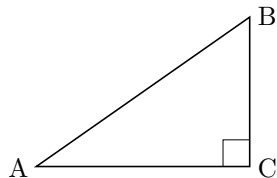


§ 6.0 座標平面の2点間の距離

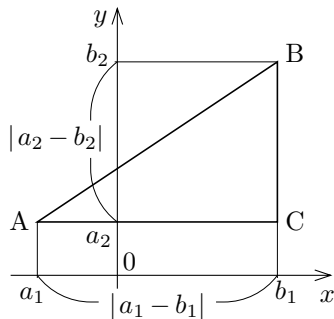
ピタゴラスの定理¹⁾といわれる定理があります：相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において角 ACB が直角であるとき、 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.
この定理より次の定理が導かれます。



定理 6.0 座標平面において、点 $A = (a_1, a_2)$ と点 $B = (b_1, b_2)$ とを結ぶ線分 AB の長さ \overline{AB} は

$$\overline{AB}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 .$$

証明 点 $A = (a_1, a_2)$ 及び点 $B = (b_1, b_2)$ に対して、座標平面の点 $C = (b_1, a_2)$ をとる。線分 AC は x 軸と平行であり、線分 BC は y 軸と平行である。よって、三角形 ABC は $\angle ACB$ を直角とする直角三角形である。従って、ピタゴラスの定理より、



$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 .$$

$A = (a_1, a_2)$, $C = (b_1, a_2)$ なので、定理 1.7.6 より $\overline{AC} = |a_1 - b_1|$, 定理 1.7.4 より

$$\overline{AC}^2 = |a_1 - b_1|^2 = (a_1 - b_1)^2 .$$

$B = (b_1, b_2)$, $C = (b_1, a_2)$ なので、定理 1.7.6 より $\overline{BC} = |a_2 - b_2|$, 定理 1.7.4 より

$$\overline{BC}^2 = |a_2 - b_2|^2 = (a_2 - b_2)^2 .$$

故に、

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 .$$

(証明終り)

¹⁾ 三平方の定理ともいいます。ピタゴラスは紀元前5世紀頃の古代ギリシャの数学者・自然哲学者です。