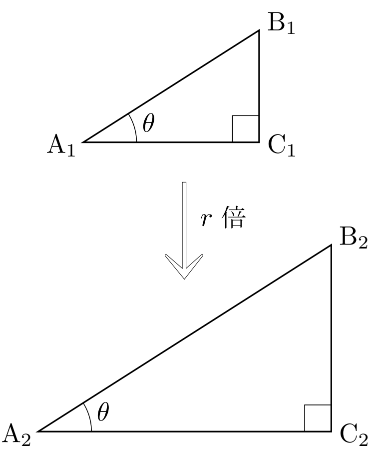
§6.1　鋭角の三角比

角度 34° や 67° などを表す変数にしばしばギリシャ文字の θ などを用います．

角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とします．相異なる 3 点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ と，相異なる 3 点 $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2$ を頂点とする三角形 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ とについて，

$$\angle \mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 = \angle \mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2 = \theta \ , \qquad \angle \mathrm{A}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1 = \angle \mathrm{A}_2\mathrm{C}_2\mathrm{B}_2 = 90^\circ$$

とします．このとき三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ と $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ とは相似です．三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ に対する三角形 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ の相似比を r とおきます．三角形 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ は三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ の r 倍です．



$$\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2} = r\,\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1} \ , \qquad \overline{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2} = r\,\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1} \ ,$$

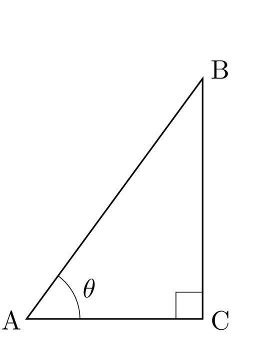
よって

$$\frac{\overline{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}} = \frac{r\,\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}}{r\,\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}} = \frac{\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}} \ .$$

同様にして次の等式が導かれます：

$$\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}} = \frac{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}} \ , \qquad \frac{\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}} = \frac{\overline{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2}} \ .$$

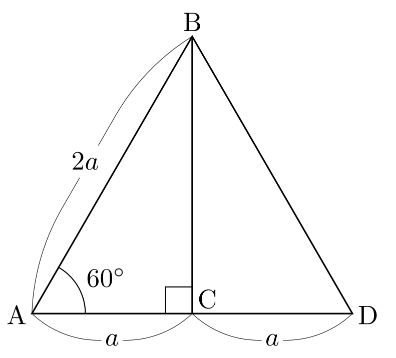
角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とします．相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とします．角度 θ に対して，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$，$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の各々の値は直角三角形 ABC の大きさに関わらず唯一つに決まります．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，θ の正弦 (sine) といい $\sin\theta$ と書き表します．$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ の値を，θ の余弦 (cosine) といい $\cos\theta$ と書き表します．$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$ の値を，θ の正接 (tangent) といい $\tan\theta$ と書き表します．



$$\sin\theta = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \ , \quad \cos\theta = \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \ , \quad \tan\theta = \tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} \ .$$

角度に対するこのような直角三角形の辺の長さの比（の値）を三角比といいます．

相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{D}$ を頂点とする三角形 ABD は正三角形であるとします．辺 $\overline{\mathrm{AD}}$ の中点を C とおきます．$\overline{\mathrm{AC}} = a > 0$ とおきます．



$$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AC}} = a \ ,$$

よって

$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CD}} = a + a = 2a \ .$$

三角形 ABD は正三角形ですから，

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = 2a > 0 \ .$$

$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ なので，直角三角形 ABC において，ピタゴラスの定理より，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 \ ,$$
$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2 \ .$$

$\overline{\mathrm{AC}} = a$，$\overline{\mathrm{AB}} = 2a$ なので，

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \ ,$$

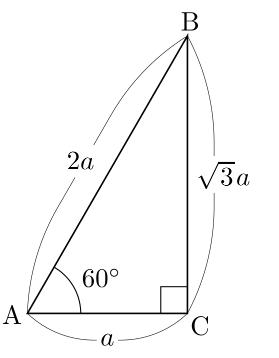
$a > 0$ なので

$$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a \ .$$

こうして，直角三角形 ABC について次のようになります：

$$\overline{\mathrm{AB}} = 2a \ , \qquad \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3}a \ , \qquad \overline{\mathrm{AC}} = a \ .$$

三角形 ABD 直角三角形 ABC において $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ なので，正弦・余弦・正接の定義より以下の式が導かれます：



$$\sin 60^\circ = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ;$$

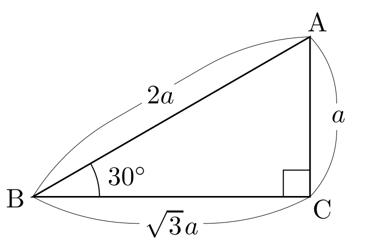
$$\cos 60^\circ = \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \ ;$$

$$\tan 60^\circ = \tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \ .$$

更に，直角三角形 ABC において $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ なので，

$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ACB} - \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \ .$$

従って正弦・余弦・正接の定義より以下の式が導かれます：



$$\sin 30^\circ = \sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \ ;$$

$$\cos 30^\circ = \cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ;$$

$$\tan 30^\circ = \tan\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ とします．

$$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ACB} - \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ = \angle\mathrm{BAC} \ ,$$

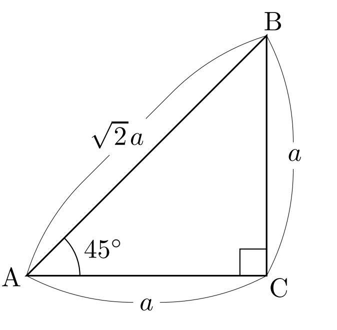
従って直角三角形 ABC は二等辺三角形ですから，$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$．$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} = a > 0$ とおきます．ピタゴラスの定理より

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \ ,$$

$a > 0$ なので，

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} \ .$$

こうして以下の式が導かれます：



$$\sin 45^\circ = \sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\cos 45^\circ = \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\tan 45^\circ = \tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{a}{a} = 1 \ .$$

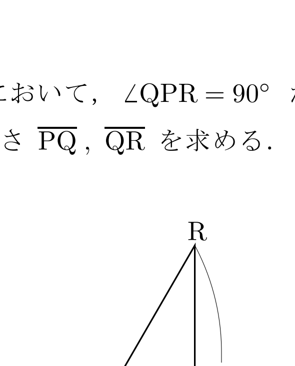
以上の結果をまとめておきます：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \ , \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ ;$$
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \qquad \tan 45^\circ = 1 \ ;$$
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \ , \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3} \ .$$

直角三角形の内角の大きさと一辺の長さが分かれば，三角比の値を用いて，他の二辺の長さを求めることができます．

例題　相異なる 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{QPR} = 90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{PQR} = 60^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PR}} = 5\sqrt{3}$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PQ}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求める．

〔解説〕 正弦の定義より



$$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{QR}}} = \sin\angle\mathrm{PQR} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

従って

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{PR}} = \frac{2}{\sqrt{3}}5\sqrt{3} = 10 \ .$$

また，ピタゴラスの定理より，

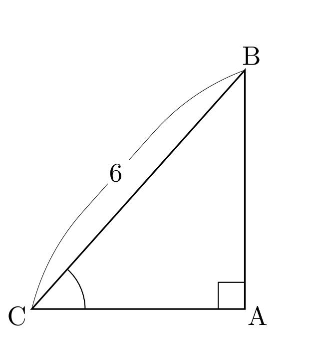
$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{QR}}^2 - \overline{\mathrm{PR}}^2 = 100 - 75 = 25 \ .$$

$\overline{\mathrm{PQ}} \geq 0$ なので $\overline{\mathrm{PQ}} = 5$ ．　終

問題 6.1.1　相異なる 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする三角形 PQR において，$\angle\mathrm{PQR} = 90^\circ$ かつ $\angle\mathrm{QPR} = 30^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{6}$ とします．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{PR}}$，$\overline{\mathrm{QR}}$ を求めなさい．

例題　相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ かつ $\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{2}{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 6$ とする．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{AC}}$ を求める．

〔解説〕 余弦の定義より



$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{2}{3} \ ,$$

従って

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}} = \frac{2}{3} \times 6 = 4 \ .$$

また，ピタゴラスの定理より，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2 = 6^2 - 4^2 = 20 \ .$$

$\overline{\mathrm{AB}} \geq 0$ なので，$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{20}$ ．　終

問題 6.1.2　相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC において，$\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = 8$ かつ $\sin\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{3}{4}$ とします．他の 2 辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{BC}}$ を求めなさい．