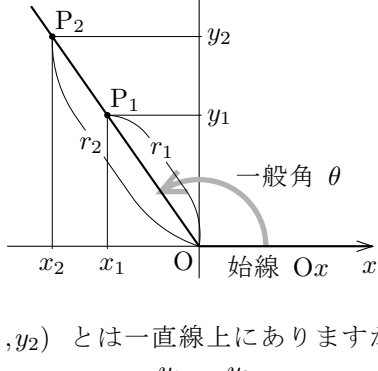


§ 6.3 一般角の三角比

xy 座標平面において、原点 $O = (0, 0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 P_1 と P_2 とをとります。 $P_1 \neq O$, $P_2 \neq O$ とします。次のようにおきます：

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2);$$

$$\overline{OP_1} = r_1, \quad \overline{OP_2} = r_2.$$



原点 $O = (0, 0)$ と点 $P_1 = (x_1, y_1)$ と点 $P_2 = (x_2, y_2)$ とは一直線上にありますから、 $\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}$, $\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}$; 更に、 $x_1 \neq 0$ のとき、 $x_2 \neq 0$ で $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

つまり、 xy 座標平面において、原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 (一般角) が θ の動径に属する点 $P = (x, y)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおくと、 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, ($x \neq 0$ のとき) $\frac{y}{x}$ の値は一般角 θ の値だけから唯一に決まります。このことに基づいて、一般角 θ に対して、 θ の**正弦** (sine) $\sin\theta$ と θ の**余弦** (cosine) $\cos\theta$ と θ の**正接** (tangent) $\tan\theta$ とを定義します。

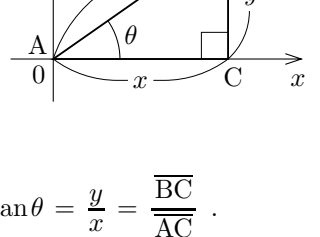
定義 一般角 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ を次のように定義する: xy 座標平面において、原点 $O = (0, 0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x, y)$ (但し $P \neq O$) について $r = \overline{OP}$ とおくと、

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r},$$

$$x \neq 0 \text{ のとき } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

一般角の正弦・余弦・正接などを三角比といいます。角度 θ について $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とします。相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において $\angle BAC = \theta$ かつ $\angle ACB = 90^\circ$ とします。次のように xy 座標系を定めます: A が原点 $(0, 0)$ で、点 C は x 軸上にあり C の x 座標は正で、点 B の y 座標は正である。 $\overline{AB} = r$, $B = (x, y)$ とおきます。 $x > 0$ なので $x = \overline{AC}$, $y > 0$ なので $y = \overline{CB}$. 線分 AB の始線 Ax に対する角度は θ ですから、

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$



このように一般角の三角比は 6.1 節で述べた直角三角形の内角の三角比の拡張です。

xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 P で $\overline{OP} = 1$ である点 P を考えます。始線 Ox に対する線分 OP の角度が $\theta = 0^\circ$ のとき、線分 OP は始線 Ox に重なります。 $\overline{OP} = 1$, $P = (1, 0)$ なので、

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{1} = 0, \quad \cos 0^\circ = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0.$$

始線 Ox に対する線分 OP の角度が $\theta = 90^\circ$ のとき、線分 OP は y 軸の y 座標が 0 以上の部分に重なります。 $\overline{OP} = 1$, $P = (0, 1)$ なので、

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{1} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{1} = 0;$$

$\tan 90^\circ$ の値はありません。更に、始線 Ox に対する線分 OP の角度が $\theta = 270^\circ$ のとき、 $P = (0, -1)$ なので、 $\tan 270^\circ$ の値はありません。 $\theta = \pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ, \dots$ のとき、つまり一般角 θ が 90° の奇数倍であるとき、 $\tan\theta$ の値はありません。一般角 θ が 90° の奇数倍でないとき $\tan\theta$ の値があります。

一般角 θ に対して、 xy 座標平面において原点 $O = (0, 0)$ と、始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x, y)$ ($P \neq O$) とをと、 $r = \overline{OP} > 0$ とおきます。 θ の正弦・余弦の符号は次のようになります：

θ が第 1 象限の角度のとき、 $x > 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$, $y > 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$;
 θ が第 2 象限の角度のとき、 $x < 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $y > 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$;
 θ が第 3 象限の角度のとき、 $x < 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $y < 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$;
 θ が第 4 象限の角度のとき、 $x > 0$ なので $\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$, $y < 0$ なので $\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$.

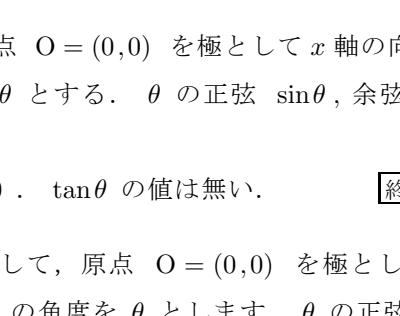
第 2 象限の角度 θ_2 $\sin\theta_2 > 0$ $\cos\theta_2 < 0$	第 1 象限の角度 θ_1 $\sin\theta_1 > 0$ $\cos\theta_1 > 0$
第 3 象限の角度 θ_3 $\sin\theta_3 < 0$ $\cos\theta_3 < 0$	第 4 象限の角度 θ_4 $\sin\theta_4 < 0$ $\cos\theta_4 > 0$

例題 一般角 θ に対して、 xy 座標平面において原点 $O = (0, 0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に点 $P = (-3, 2)$ が属するとする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めよ。

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}.$$

正弦・余弦・正接の定義より、

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \tan\theta = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}. \quad \text{終}$$



問題 6.3.1 一般角 θ に対して、 xy 座標平面において原点 $O = (0, 0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に点 $P = (5, -4)$ が属するとする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい。

例題 xy 座標平面の点 $P = (0, 3)$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度を θ とする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めよ。

$$\overline{OP} = 3 \text{ なので, } \sin\theta = \frac{3}{3} = 1, \quad \cos\theta = \frac{0}{3} = 0. \quad \tan\theta \text{ の値は無い。} \quad \text{終}$$

問題 6.3.2 xy 座標平面の点 $P = (0, -5)$ に対して、原点 $O = (0, 0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度を θ とする。 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ の各々の値を求めなさい。

例題 一般角 510° の正弦 $\sin 510^\circ$, 余弦 $\cos 510^\circ$, 正接 $\tan 510^\circ$ の各々の値を求めよ。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 510° の動径に属する点 P ($P \neq O$) をとり、点 P から x 軸に下した垂線の足を H とおき、直角三角形 OPH に着目します。

$$\angle POH = 180^\circ - (510^\circ - 360^\circ) = 30^\circ.$$

よって直角三角形 OPH の内角は 30° と 60° と 90° なので、

$$\overline{HP} : \overline{PO} : \overline{OH} = 1 : 2 : \sqrt{3}.$$

点 P は角度 510° の動径に属する O 以外のどの点でもよいので、 $r = \overline{OP} = 2$ とします。 $P = (x, y)$ とおきます。

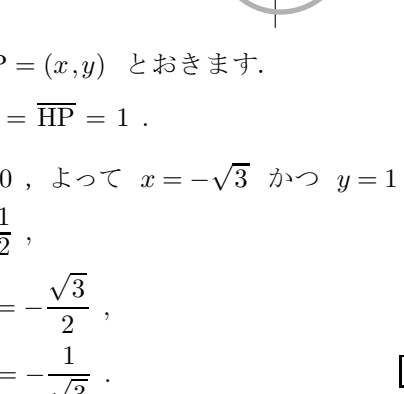
$$|x| = \overline{OH} = \sqrt{3}, \quad |y| = \overline{HP} = 1.$$

510° は第 2 象限の角度なので、 $x < 0$ かつ $y > 0$, よって $x = -\sqrt{3}$ かつ $y = 1$.

$$\sin 510^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 510^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 510^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \text{終}$$



問題 6.3.3 xy 座標平面において、原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 660° の動径を描き、一般角 660° の正弦 $\sin 660^\circ$, 余弦 $\cos 660^\circ$, 正接 $\tan 660^\circ$ の各々の値を求めなさい。

例題 一般角 -135° の正弦 $\sin(-135^\circ)$, 余弦 $\cos(-135^\circ)$, 正接 $\tan(-135^\circ)$ の各々の値を求めよ。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 -135° の動径に属する点 P ($P \neq O$) をとり、点 P から x 軸に下した垂線の足を H とおき、直角三角形 OPH に着目します。

$$\angle POH = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

よって直角三角形 OPH は直角二等辺三角形なので、

$$\overline{PH} : \overline{HO} : \overline{OP} = 1 : 1 : \sqrt{2}.$$

点 P は角度 -135° の動径に属する O 以外のどの点でもよいので、 $r = \overline{OP} = \sqrt{2}$ とします。 $P = (x, y)$ とおきます。

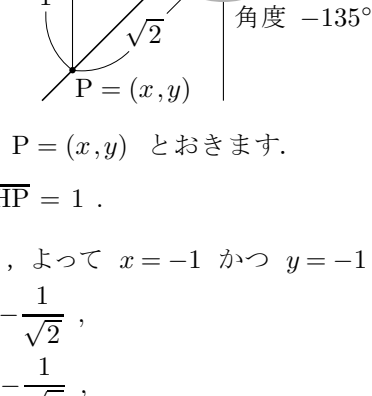
$$|x| = \overline{OH} = 1, \quad |y| = \overline{HP} = 1.$$

-135° は第 3 象限の角度なので、 $x < 0$ かつ $y < 0$, よって $x = -1$ かつ $y = -1$.

$$\sin(-135^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos(-135^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\tan(-135^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1. \quad \text{終}$$



問題 6.3.4 xy 座標平面において、原点 O から x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 -225° の動径を描き、一般角 -225° の正弦 $\sin(-225^\circ)$, 余弦 $\cos(-225^\circ)$, 正接 $\tan(-225^\circ)$ の各々の値を求めなさい。

三角比の値から角度を求めてみます。

例題 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である一般角 θ を求めよ。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x, y)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおきます。

$$\frac{y}{r} = \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y : r = \sqrt{3} : 2.$$

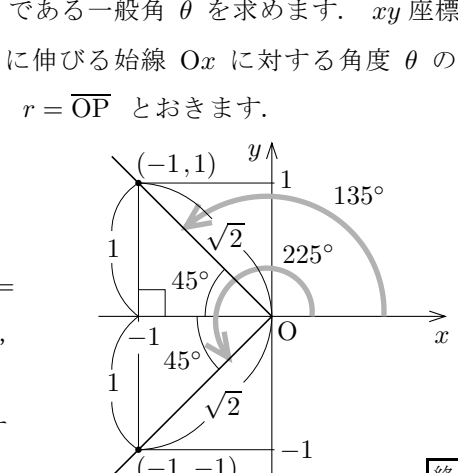
$r = \overline{OP} = 2$ とします。 $y = \sqrt{3}$.

$$r^2 = \overline{OP}^2 = x^2 + y^2 \text{ なので } x^2 =$$

$$r^2 - y^2 = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 1, \text{ よって } x = \pm 1.$$

点 P は $(1, \sqrt{3})$ または $(-1, \sqrt{3})$ です。

右図のように始線 Ox に対する OP の角度 θ は 60° と 120° とです。終



問題 6.3.5 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で $\sin\theta = \frac{1}{2}$ である一般角 θ を求めなさい。

例題 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である一般角 θ を求めよ。 xy 座標平面において、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属する点 $P = (x, y)$ ($P \neq O$) をとり、 $r = \overline{OP}$ とおきます。

$$\frac{x}{r} = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x : r = -1 : \sqrt{2}.$$

$r = \overline{OP} = \sqrt{2}$ とします。 $x = -1$. $r^2 = \overline{OP}^2 =$

$$x^2 + y^2 \text{ なので } y^2 = r^2 - x^2 = \sqrt{3}^2 - 1^2 = 1,$$

$$\text{よって } y = \pm 1. \text{ 点 } P \text{ は } (-1, 1) \text{ または } (-1, -1) \text{ です。}$$

右図のように始線 Ox に対する OP の角度 θ は 135° と 225° とです。終

問題 6.3.6 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ である一般角 θ を求めなさい。