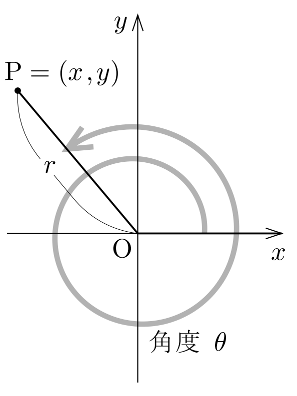
§6.4　三角比の性質

定理 6.4.1　任意の一般角 θ について，

θ が角度 90° の奇数倍でないとき　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

証明　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． θ が 90° の奇数倍でないとき，$x\neq 0$ で，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があり，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}\neq 0$ で，



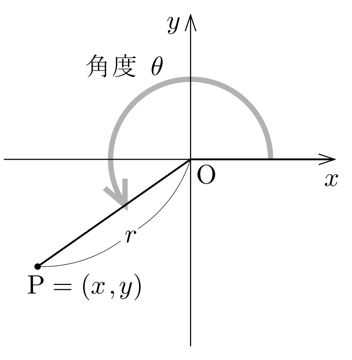
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta\ .$$

（証明終り）

定理 6.4.2　任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = 1\ .$$

証明　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとる．$\mathrm{O}=(0,0)$ なので，定理 6.0 より，



$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (x-0)^2+(y-0)^2 = x^2+y^2\ .$$

$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく． $\overline{\mathrm{OP}}^2=r^2$ なので，

$$x^2+y^2 = r^2\ .$$

定義より $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ なので，

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}=1\ ,$$

つまり $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$.　　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　一般角 θ について $\sin\theta=\dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta\geq 0$ とする． $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める．

〔解説〕 定理 6.4.2 より $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ． $\sin\theta=\dfrac{5}{7}$ なので，

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2+(\cos\theta)^2=1\ ,$$

$$(\cos\theta)^2=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}\ ,$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{24}{49}}=\pm\frac{\sqrt{24}}{7}\ ,$$

$\cos\theta\geq 0$ なので $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{24}}{7}$ ． 更に，定理 6.4.1 より，

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{\sqrt{24}}{7}}=\frac{5}{\sqrt{24}}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.1}}$　一般角 θ について $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ かつ $\cos\theta\leq 0$ とします． $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めなさい．

$\boxed{\text{問題 6.4.2}}$　一般角 θ について $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ かつ $\sin\theta\geq 0$ とします． $\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めなさい．

定理 6.4.3　任意の一般角 θ について，

θ が角度 90° の奇数倍でないとき　$1+(\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$.

証明　一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする． このとき $\cos\theta\neq 0$ ． 定理 6.4.2 より $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ． 両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2}=\frac{1}{(\cos\theta)^2}\ ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1 = (\tan\theta)^2+1 = 1+(\tan\theta)^2\ ,$$

従って $1+(\tan\theta)^2=\dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$.　　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　一般角 θ について $\tan\theta=3$ かつ $\cos\theta\leq 0$ とする． $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める．

〔解説〕 定理 6.4.3 より $1+(\tan\theta)^2=\dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2}=1+(\tan\theta)^2=1+3^2=10\ ,$$

$$(\cos\theta)^2=\frac{1}{10}\ ,$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\ ,$$

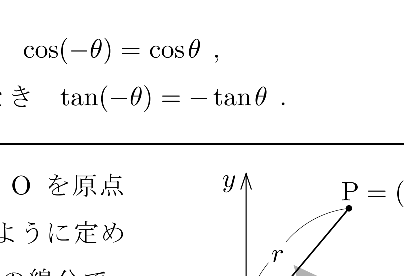
$\cos\theta\leq 0$ なので $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ． 更に，定理 6.4.1 より $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{10}}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.3}}$　一般角 θ について $\tan\theta=\dfrac{3}{2}$ かつ $\cos\theta\leq 0$ とします． $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求めなさい．

xy 座標平面の点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ が点 $\mathrm{P}=(x,y)$ と x 軸に関して対称であるとき，



$$x'=x\ ,\quad y'=-y\ .$$

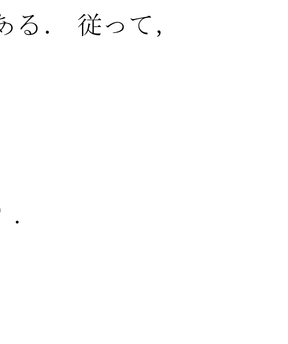
このことから次の定理が導かれます．

定理 6.4.4　任意の一般角 θ について，

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta\ ,\qquad \cos(-\theta)=\cos\theta\ ,$$

θ が 90° の奇数倍でないとき　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$.

証明　実数 r について $r>0$ とする． 点 O を原点とする xy 座標平面の点 $\mathrm{P}=(x,y)$ を次のように定める：線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ ． 更に，点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ を次のように定める：線分 OP$'$ は始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の線分で，$\overline{\mathrm{OP}'}=r$ ． $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}'}$ で，始線 Ox に対する線分 OP の角度は θ , 線分 OP$'$ の角度は $-\theta$ なので，



点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ と点 $\mathrm{P}=(x,y)$ とは x 軸に関して対称である． 従って，

$$x'=x\ ,\qquad y'=-y\ .$$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ ，$\sin(-\theta)=\dfrac{y'}{r}$ なので，

$$\sin(-\theta)=\frac{y'}{r}=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\theta\ .$$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ， $\cos(-\theta)=\dfrac{x'}{r}$ なので

$$\cos(-\theta)=\frac{x'}{r}=\frac{x}{r}=\cos\theta\ .$$

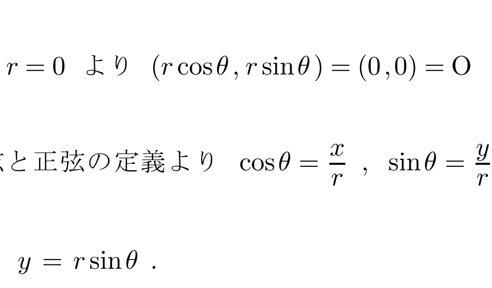
更に，θ が 90° の奇数倍でないとき， $x\neq 0$ かつ $x'\neq 0$ で， $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ， $\tan(-\theta)=\dfrac{y'}{x'}$ なので，

$$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta\ .$$

（証明終り）

定理 6.4.5　xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であるとき，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおくと

$$\mathrm{P}=(r\cos\theta, r\sin\theta)\ .$$



証明　$r=\overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r\geq 0$ ． $r=0$ のときと $r>0$ のときに分ける．

$r=0$ のとき，$\overline{\mathrm{OP}}=0$ なので $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ ，$r=0$ より $(r\cos\theta, r\sin\theta)=(0,0)=\mathrm{O}$ ； よって $\mathrm{P}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．

$r>0$ のとき，$\mathrm{P}=(x,y)$ とおく． 余弦と正弦の定義より $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ なので，

$$x=r\cos\theta\ ,\qquad y=r\sin\theta\ .$$

よって $\mathrm{P}=(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.　　（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{\mathrm{OP}}=5$ とする． 点 P を求める．

$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ なので，定理 6.4.5 より，

$$\mathrm{P}=(5\cos 30^\circ, 5\sin 30^\circ)=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.4}}$　点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 60° で $\overline{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{3}$ とします． 点 P を求めなさい．

定理 6.4.6　任意の一般角 θ について，

$$-1\leq\sin\theta\leq 1\ ,\qquad -1\leq\cos\theta\leq 1\ .$$

証明　任意の一般角 θ について，定理 6.4.2 より $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ ． $S=\sin\theta$ とおき $C=\cos\theta$ とおくと $S^2+C^2=1$ ． これより $C^2=1-S^2$ ． C は実数なので $C^2\geq 0$ ，よって $1-S^2\geq 0$ ． この不等式を S に関する不等式と考えて解く； $S^2-1\leq 0$ ， $(S+1)(S-1)\leq 0$ ， $-1\leq S\leq 1$ ． 故に $-1\leq\sin\theta\leq 1$ ． また，$S^2+C^2=1$ より $1-C^2=S^2\geq 0$ ，この不等式を C に関する不等式として解くと $-1\leq C\leq 1$ ． 故に $-1\leq\cos\theta\leq 1$.　　（証明終り）