§6.5　加法定理

加法定理は重要な定理です．その証明はやや面倒なので次節で述べます．

定理（正弦と余弦の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて，

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \quad（複号同順）.$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \quad（複号同順）.$$

加法定理を用いて $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ を計算します．

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ .$$

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ .$$

加法定理を用いて $\sin 75^\circ$ 及び $\cos 75^\circ$ を計算します．

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ .$$

$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ .$$

例題　一般角 θ について $\sin\theta=\frac{3}{5}$ かつ $\cos\theta=\frac{4}{5}$ とする．次の式の値を求める： $\sin(\theta+30^\circ)$, $\cos(\theta+30^\circ)$.

$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta+30^\circ)=\sin\theta\cos 30^\circ+\cos\theta\sin 30^\circ=\frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\frac{1}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\ .$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta+30^\circ)=\cos\theta\cos 30^\circ-\sin\theta\sin 30^\circ=\frac{4}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\frac{1}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\ .$$ 終

問題 6.5.1　一般角 θ について $\sin\theta=\frac{3}{4}$ かつ $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ とします．次の式の値を求めなさい： $\sin(\theta+60^\circ)$, $\cos(\theta+60^\circ)$.

例題　一般角 θ について $\sin\theta=\frac{2}{3}$ かつ $\cos\theta<0$ とする．次の式の値を求める： $\sin(\theta-60^\circ)$, $\cos(\theta-60^\circ)$.

$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ なので，

$$(\cos\theta)^2=1-(\sin\theta)^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\ ,$$

$\cos\theta<0$ なので

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}\ .$$

また， $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ．正弦の加法定理より，

$$\sin(\theta-60^\circ)=\sin\theta\cos 60^\circ-\cos\theta\sin 60^\circ=\frac{2}{3}\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{15}}{6}\ .$$

余弦の加法定理より，

$$\cos(\theta-60^\circ)=\cos\theta\cos 60^\circ+\sin\theta\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}\ .$$ 終

問題 6.5.2　一般角 θ について $\cos\theta=-\frac{3}{4}$ かつ $\sin\theta<0$ とします．次の式の値を求めなさい： $\sin(\theta-30^\circ)$, $\cos(\theta-30^\circ)$.

正接の加法定理もあります．

定理（正接の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて， $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 及び， $\tan(\alpha+\beta)$ または $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\ ,\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ .$$

例題　一般角 θ について $\tan\theta=5$ とする．次の式の値を求める： $\tan(\theta+60^\circ)$, $\tan(\theta-60^\circ)$ ．分母に根号が現れるときは分母を有理化する．

正接の加法定理を用いる．

$$\tan(\theta+60^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan 60^\circ}{1-\tan\theta\tan 60^\circ}=\frac{5+\sqrt{3}}{1-5\sqrt{3}}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)\left(1+5\sqrt{3}\right)}{\left(1-5\sqrt{3}\right)\left(1+5\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{5+25\sqrt{3}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}^{\,2}}{1^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5+26\sqrt{3}+15}{1-75}=-\frac{20+26\sqrt{3}}{74}$$
$$=-\frac{10+13\sqrt{3}}{37}\ .$$

$$\tan(\theta-60^\circ)=\frac{\tan\theta-\tan 60^\circ}{1+\tan\theta\tan 60^\circ}=\frac{5-\sqrt{3}}{1+5\sqrt{3}}=\frac{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(1-5\sqrt{3}\right)}{\left(1+5\sqrt{3}\right)\left(1-5\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{5-25\sqrt{3}-\sqrt{3}+5\sqrt{3}^{\,2}}{1^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5-26\sqrt{3}+15}{1-75}=-\frac{20-26\sqrt{3}}{74}$$
$$=\frac{13\sqrt{3}-10}{37}\ .$$ 終

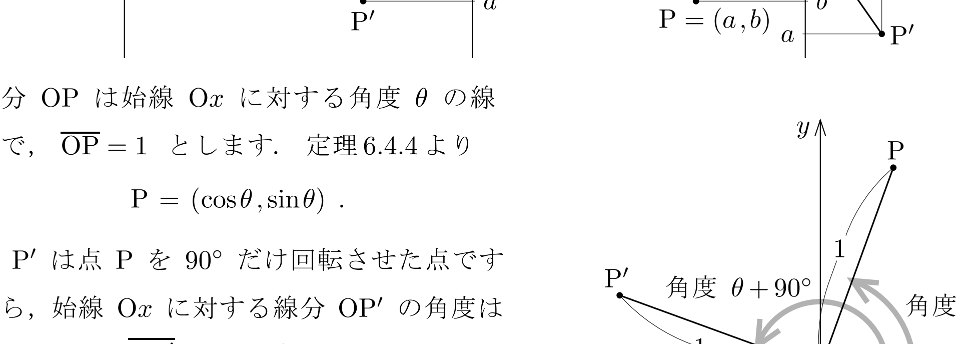
問題 6.5.3　一般角 θ について $\tan\theta=2$ とします．次の式の値を求めなさい： $\tan(\theta+30^\circ)$, $\tan(\theta-30^\circ)$ ．分母に根号が現れるときは分母を有理化しなさい．
medskip

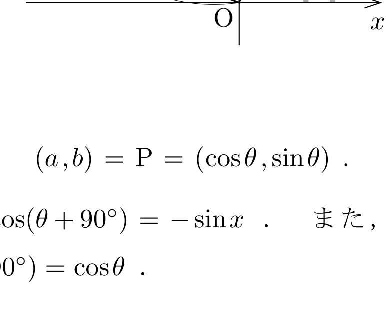
加法定理から次の定理が導かれます（次の節で証明します）．

定理 6.5　任意の一般角 θ について，

$$\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta\ ,\qquad \cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta\ .$$

この定理は次のように考えても分かります． xy 座標平面において，原点 O を中心にして点 $\mathrm{P}=(a,b)$ を 90° だけ回転させた点を P' とおきます．このとき，次の図のように， $\mathrm{P}'=(-b,a)$ となります．





線分 OP は始線 Ox に対する角度 θ の線分で， $\overline{\mathrm{OP}}=1$ とします．定理 6.4.4 より

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

点 P' は点 P を 90° だけ回転させた点ですから，始線 Ox に対する線分 OP' の角度は $\theta+90^\circ$ で， $\overline{\mathrm{OP}'}=1$ ．定理 6.4.4 より

$$\mathrm{P}'=\left(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ)\right)\ .$$

$\mathrm{P}=(a,b)$ かつ $\mathrm{P}'=(-b,a)$ なので，

$$\left(\cos(\theta+90^\circ),\sin(\theta+90^\circ)\right)=\mathrm{P}'=(-b,a)\ ,\qquad (a,b)=\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

$\cos(\theta+90^\circ)=-b$ かつ $b=\sin\theta$ なので， $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin x$ ．また， $\sin(\theta+90^\circ)=a$ かつ $a=\cos\theta$ なので， $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$.

例題　次の式の値を求める： $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$.

定理 6.5 の公式 $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$, $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$ を用いる．

$$\sin 120^\circ=\sin(30^\circ+90^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\cos 120^\circ=\cos(30^\circ+90^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}\ .$$

また，

$$\tan 120^\circ=\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}\ .$$ 終

問題 6.5.4　次の式の値を求めなさい： $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\tan 150^\circ$.