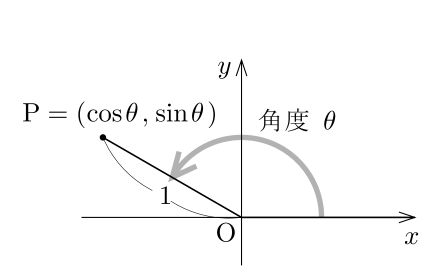
§6.6　加法定理の証明

定理6.4.4から次のことが分かります：点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，$\overline{\mathrm{OP}}=1$ で線分 OP の始線 Ox に対する角度が θ であるとき，$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)$．このことを用いてまず余弦の加法定理を証明します．



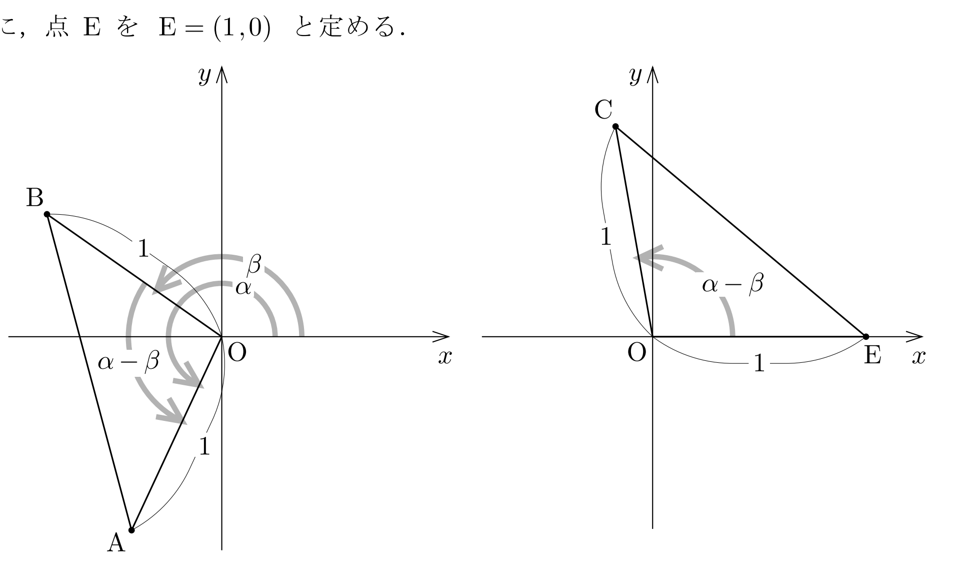
定理（余弦の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

証明　点 O を原点とする xy 座標平面において，3 点 A, B, C を次のように定める：$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=1$ で，

線分 OA は 始線 Ox に対する角度 α の線分，
線分 OB は 始線 Ox に対する角度 β の線分，
線分 OC は 始線 Ox に対する角度 $(\alpha-\beta)$ の線分．

更に，点 E を $\mathrm{E}=(1,0)$ と定める．



定理6.4.4より次のことが成り立つ：

$$\mathrm{A}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\qquad \mathrm{B}=(\cos\beta,\sin\beta),\qquad \mathrm{C}=\bigl(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\bigr).$$

線分 OB と線分 OA，及び線分 OE と線分 OC との位置関係は次のようになる：

点 O を中心に線分 OB を $(\alpha-\beta)$ の角度だけ回転させた線分が OA であり，
点 O を中心に線分 OE を $(\alpha-\beta)$ の角度だけ回転させた線分が OC である．

従って 角 AOB と角 COE とは同じ大きさである． 更に $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OE}}$ なので，三角形 AOB と三角形 COE とは合同である． よって $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CE}}$ なので，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{CE}}^2.$$

$\mathrm{A}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\mathrm{B}=(\cos\beta,\sin\beta)$ なので，定理6.0より，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2.$$

この等式の右辺を計算する． $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$，$(\sin\beta)^2+(\cos\beta)^2=1$ なので，

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AB}}^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\
&=(\cos\alpha)^2-2\cos\alpha\cos\beta+(\cos\beta)^2+(\sin\alpha)^2-2\sin\alpha\sin\beta+(\sin\beta)^2\\
&=(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2+(\cos\beta)^2+(\sin\beta)^2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta\\
&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).
\end{aligned}$$

$\mathrm{C}=\bigl(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\bigr)$，$\mathrm{E}=(1,0)$ なので，定理6.0より，

$$\overline{\mathrm{CE}}^2=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\{\sin(\alpha-\beta)\}^2.$$

この等式の右辺を計算する． $\{\sin(\alpha-\beta)\}^2+\{\cos(\alpha-\beta)\}^2=1$ なので，

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{CE}}^2&=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\{\sin(\alpha-\beta)\}^2\\
&=\{\cos(\alpha-\beta)\}^2-2\cos(\alpha-\beta)+1+\{\sin(\alpha-\beta)\}^2\\
&=1+\{\sin(\alpha-\beta)\}^2+\{\cos(\alpha-\beta)\}^2-2\cos(\alpha-\beta)\\
&=2-2\cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{CE}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$ なので，

$$\begin{aligned}
2-2\cos(\alpha-\beta)&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta),\\
-2\cos(\alpha-\beta)&=-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta),\\
\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

また，この式において β を $-\beta$ におきかえると

$$\cos\{\alpha-(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta),$$

定理6.4.3より $\cos(-\beta)=\cos\beta$，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$ なので，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

（証明終り）

定理6.5　任意の一般角 θ について，$\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$，$\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$．

証明　余弦の加法定理より

$$\cos(\theta+90^\circ)=\cos\theta\cos90^\circ-\sin\theta\sin90^\circ.$$

$\cos90^\circ=0$，$\sin90^\circ=1$ なので

$$\cos\theta\cos90^\circ-\sin\theta\sin90^\circ=-\sin\theta,$$

従って $\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$． 更に，この等式において θ を $-(\theta+90^\circ)$ でおき替える：

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\}=-\sin\{-(\theta+90^\circ)\}.$$

この等式の左辺は，定理6.4.3より，

$$\cos\{-(\theta+90^\circ)+90^\circ\}=\cos(-\theta-90^\circ+90^\circ)=\cos(-\theta)=\cos\theta,$$

右辺は，定理6.4.3より，

$$-\sin\{-(\theta+90^\circ)\}=-\{-\sin(\theta+90^\circ)\}=\sin(\theta+90^\circ).$$

よって $\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$．　（証明終り）

定理（正弦の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

証明　余弦の加法定理より

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\}=\cos\alpha\cos(\beta+90^\circ)-\sin\alpha\sin(\beta+90^\circ).$$

定理6.6より，

$$\cos\{\alpha+(\beta+90^\circ)\}=\cos\{(\alpha+\beta)+90^\circ\}=-\sin(\alpha+\beta),$$
$$\cos(\beta+90^\circ)=-\sin\beta,\qquad \sin(\beta+90^\circ)=\cos\beta,$$

従って

$$\begin{aligned}
-\sin(\alpha+\beta)&=\cos\alpha(-\sin\beta)-\sin\alpha\cos\beta,\\
\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

また，この式において β を $-\beta$ におき替えると

$$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta).$$

定理6.4.3より $\cos(-\beta)=\cos\beta$，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$ なので，

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

（証明終り）

定理（正接の加法定理）　任意の一般角 α と β とについて，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 及び，$\tan(\alpha+\beta)$ または $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{（複号同順）}.$$

証明　正弦及び余弦の加法定理より，

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\
&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}\\
&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.
\end{aligned}$$

同様にして等式 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ も導かれる．　（証明終り）