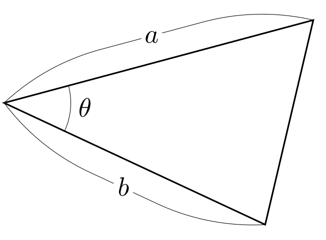
§6.7　三角形の面積と正弦定理

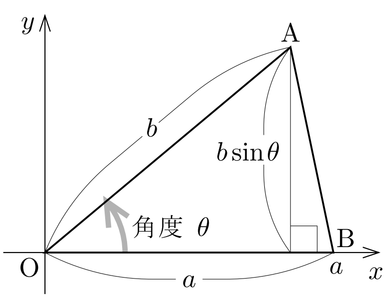
定理 6.7　三角形の 2 辺の各々の長さが a と b とでその 2 辺が成す内角の大きさが θ であるとき，この三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta \ .$$



証明　θ は三角形の内角なので $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ．正の実数 a, b 及び角度 θ に対して，xy 座標平面において点 O, A, B を次のように定める： $\mathrm{O} = (0,0)$ ； $\mathrm{B} = (a,0)$ ；始線 Ox に対する線分 OA の角度は θ であり， $\overline{\mathrm{OA}} = b$ ．このとき，

$$\overline{\mathrm{OB}} = a \ , \quad \overline{\mathrm{OA}} = b \ , \quad \angle\mathrm{AOB} = \theta \ .$$



従ってこの三角形 OAB は元の三角形と合同なので，面積も同じである．始線 Ox に対する線分 OA の角度は θ で $\overline{\mathrm{OA}} = b$ なので，定理 6.4.4 より

$$\mathrm{A} = (b\cos\theta, b\sin\theta) \ .$$

三角形 OAB において辺 OB を底辺と考える．この底辺 OB の長さは $\overline{\mathrm{OB}} = a$ ．また， $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より $\sin\theta \geq 0$ なので，底辺 OB に対する三角形 OAB の高さは点 A の y 座標 $b\sin\theta$ である．従って三角形 OAB の面積 S は

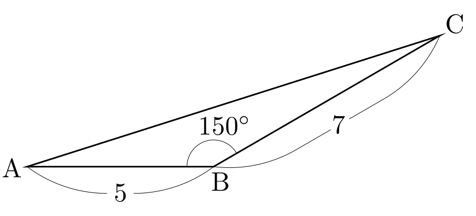
$$S = \frac{a \cdot b\sin\theta}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\theta \ .$$

（証明終り）

この定理より，三角形の 2 辺の長さとその 2 辺が成す内角の大きさとからその三角形の面積を計算できます．

例　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において， $\overline{\mathrm{AB}} = 5$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 7$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 150^\circ$ とする．

$$\sin 150^\circ = \sin(60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \ .$$



定理 6.7 より，三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 150^\circ = \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{4} \ .$$

終

問題 6.7.1　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において， $\overline{\mathrm{AC}} = 3$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 5$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 120^\circ$ とします．三角形 ABC の面積を求めなさい．

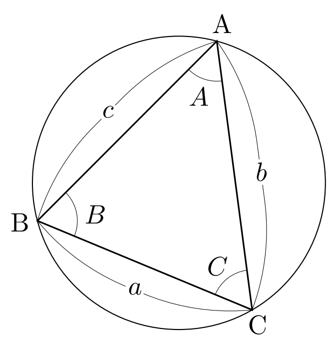
定理 6.7 より次の定理が導かれます．

定理（正弦定理）　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，

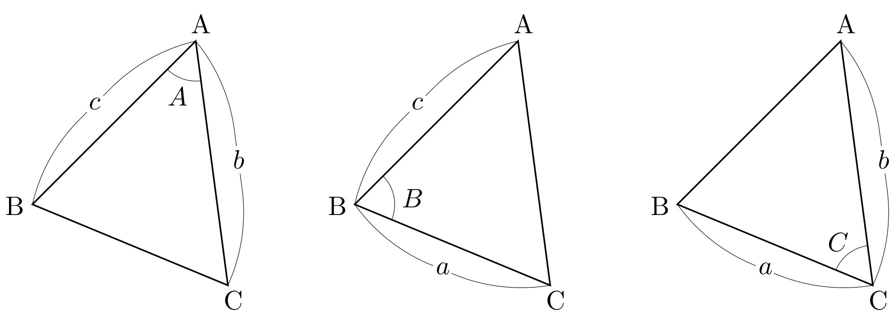
$$\angle\mathrm{BAC} = A \ , \quad \angle\mathrm{ABC} = B \ , \quad \angle\mathrm{ACB} = C \ ,$$
$$\overline{\mathrm{BC}} = a \ , \quad \overline{\mathrm{CA}} = b \ , \quad \overline{\mathrm{AB}} = c$$

とおく；更に，三角形 ABC の外接円の半径を R とおく．このとき，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \ .$$



証明　定理 6.7 より，三角形 ABC の面積 S を次のように 3 通りに表せる．



$$S = \frac{1}{2}bc\sin A \ , \qquad S = \frac{1}{2}ca\sin B \ , \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin C \ .$$

よって

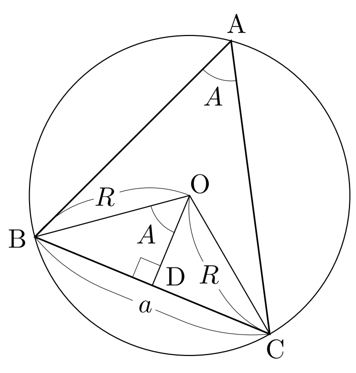
$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C \ ,$$
$$bc\sin A = ca\sin B = ab\sin C \ .$$

従って，

$$\frac{abc}{bc\sin A} = \frac{abc}{ca\sin B} = \frac{abc}{ab\sin C} \ ,$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \ .$$

三角形 ABC の 3 個の内角のうち少なくとも 2 個は鋭角 [2] である．今仮に三角形 ABC の内角 A が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ ∠BOC は弧 BC に対する円周角の大きさ ∠BAC の 2 倍である：

$$\angle\mathrm{BOC} = 2\angle\mathrm{BAC} \ .$$



線分 BC の中点を D とおく． $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = R$ なので，三角形 OBC は二等辺三角形である．従って，

$$\angle\mathrm{BOD} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC} = \frac{1}{2}2\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BAC}$$
$$= A \ .$$

また，角 ODB は直角なので，

$$\sin\angle\mathrm{BOD} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2}}{R} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} \ .$$

よって $\sin A = \sin\angle\mathrm{BOD} = \dfrac{a}{2R}$ なので， $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ ．故に

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \ .$$

（証明終り）

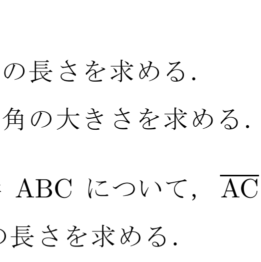
平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において，正弦定理より，例えば $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$ ．このように，正弦定理は三角形の 2 辺の長さと 2 個の内角の大きさとの間の関係を述べます．ですから，正弦定理によって次のような計算ができます．

・三角形の 1 辺の長さと 2 個の内角の大きさとから他の辺の長さを求める．
・三角形の 2 辺の長さと 1 個の内角の大きさとから他の内角の大きさを求める．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AC}} = 10$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$ とする．辺 BC の長さを求める．

正弦定理より $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BC}} &= \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}\sin\angle\mathrm{BAC} \\ &= \frac{10}{\sin 30^\circ}\sin 45^\circ = \frac{10}{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 20\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10\sqrt{2} \ .\end{aligned}$$

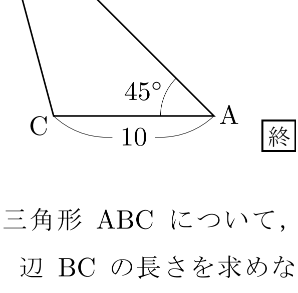


終

問題 6.7.2　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 60^\circ$ とします．辺 BC の長さを求めなさい．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 75^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 45^\circ$ とする．辺 AC の長さを求める．

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{ACB} &= 180^\circ - \angle\mathrm{BAC} - \angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ \\ &= 60^\circ \ .\end{aligned}$$



正弦定理より $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}} &= \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \ .\end{aligned}$$

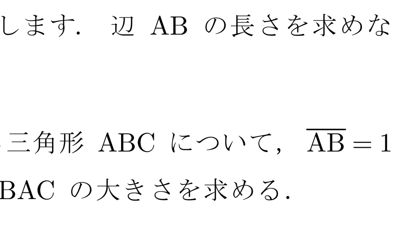
終

問題 6.7.3　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AC}} = 6$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 15^\circ$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ とします．辺 AB の長さを求めなさい．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AB}} = 1$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 30^\circ$ とする．内角 BAC の大きさを求める．

正弦定理より $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$ なので，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC} &= \overline{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\sin\angle\mathrm{ACB}}{\overline{\mathrm{AB}}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ .\end{aligned}$$

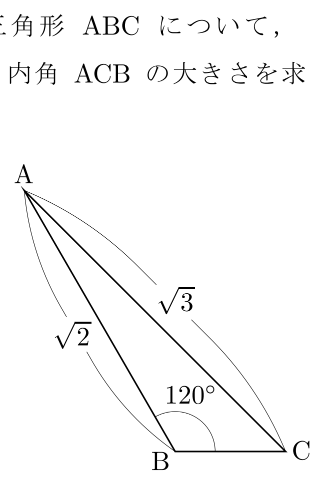


これより $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ または $\angle\mathrm{BAC} = 135^\circ$ ．どちらの場合もあり得る．　終

問題 6.7.4　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ かつ $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ とします．内角 ABC の大きさを求めなさい．

例題　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}$ かつ $\angle\mathrm{ABC} = 120^\circ$ とする．内角 ACB の大きさを求める．

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$



正弦定理より $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$ なので，

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{ACB} &= \overline{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ .\end{aligned}$$

これより $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ または $\angle\mathrm{ACB} = 135^\circ$ ． $\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{ACB} \leq 180^\circ$ より $\angle\mathrm{ACB} \leq 180^\circ - \angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ なので， $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ ．　終

問題 6.7.5　平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について， $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{\mathrm{BC}} = 1$ かつ $\angle\mathrm{ACB} = 135^\circ$ とします．内角 BAC の大きさを求めなさい．

---

[2] 角度が直角より小さい角のこと．