

§6.8 余弦定理

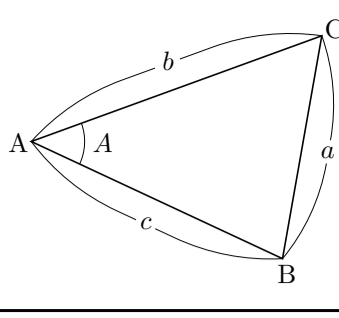
定理 (余弦定理) 平面上の相異なる 3 点

A, B, C を頂点とする三角形 ABC において,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= c, & \overline{BC} &= a, \\ \overline{CA} &= b, & \angle BAC &= A \end{aligned}$$

とおくと,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$



証明 xy 座標平面において点 O, B', C' を次のように定める: $O = (0, 0)$;

$B' = (c, 0)$; 始線 Ox に対する線分 OC' の角度は A で, $\overline{OC'} = b$. このとき,

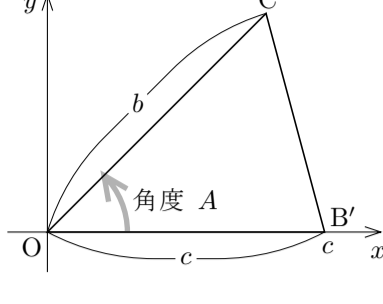
$$\overline{OB'} = c = \overline{AB},$$

$$\overline{OC'} = b = \overline{AC},$$

$$\angle C'OB' = A = \angle BAC.$$

従って三角形 $OB'C'$ と三角形 ABC とは合同である. よって

$$a = \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$



$\overline{OC'} = b$ で, 始線 Ox に対する線分 OC' の角度は A なので, 定理 6.4.4 より

$$C' = (b \cos A, b \sin A).$$

更に $B' = (c, 0)$ なので, 定理 6.0 より,

$$\overline{B'C'}^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2(\cos A)^2 - 2bc \cos A + c^2 + b^2(\sin A)^2$$

$$= b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc \cos A.$$

定理 6.4.2 より $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$ なので,

$$b^2\{(\sin A)^2 + (\cos A)^2\} + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

よって

$$\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$\overline{B'C'} = \overline{BC} = a$ なので, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. (証明終り)

相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において, 余弦定理より,

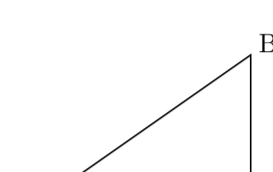
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC.$$

ここで, 内角 BAC が直角であるとするとき,

$\angle BAC = 90^\circ$ より $\cos \angle BAC = \cos 90^\circ = 0$ な

ので,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$



これはピタゴラスの定理 (三平方の定理) です.

このように, ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合です.

平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において, 余弦定理より, 例えば $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \sin \angle BAC$. このように, 余弦定理は三角形の 3 辺の長さとの間の関係を述べます. ですから, 余弦定理によって次のような計算ができます.

・三角形の 2 辺の長さとの間の関係から他の辺の長さを求める.

・三角形の 3 辺の長さから内角の大きさを求める.

例題 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

$$\cos 120^\circ = \cos(30^\circ + 90^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

余弦定理より

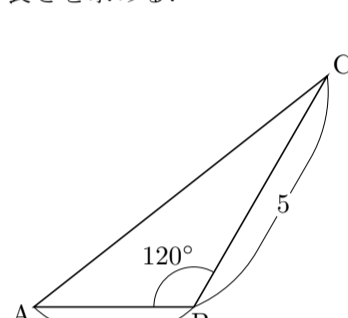
$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 49.$$

$\overline{AC} \geq 0$ なので $\overline{AC} = \sqrt{49} = 7$. 終



問題 6.8.1 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 30^\circ$ とします. 辺 BC の長さを求めなさい.

問題 6.8.2 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AC} = 5$ かつ $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 150^\circ$ とします. 辺 AB の長さを求めなさい.

例題 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{7}$ とします. 内角 BAC の大きさを求めなさい.

余弦定理より,

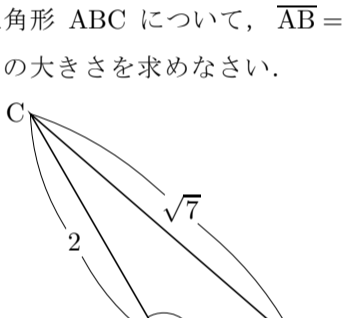
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC,$$

$$\sqrt{7}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \angle BAC,$$

$$4 \cos \angle BAC = -2,$$

$$\cos \angle BAC = -\frac{1}{2},$$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ なので $\angle BAC = 120^\circ$. 終



問題 6.8.3 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 3\sqrt{3}$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\overline{BC} = 2$ とします. 内角 ABC の大きさを求めなさい.

例題 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 8$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\angle ABC = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.

【解説】 余弦定理より

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC.$$

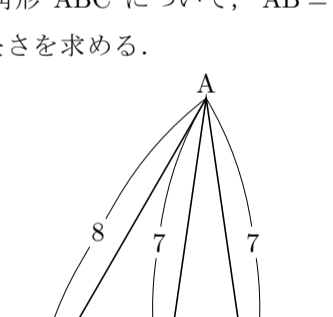
$a = \overline{BC}$ とおくと,

$$49 = a^2 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos 60^\circ,$$

$$a^2 - 8a + 15 = 0, \quad (a-3)(a-5) = 0, \quad a = 3$$

または $a = 5$. つまり $\overline{BC} = 3$ または

$\overline{BC} = 5$. どちらの場合もあり得る. 終



問題 6.8.4 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{13}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ とします. 辺 AC の長さを求めなさい.

例題 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AC} = \sqrt{6}$ かつ $\overline{BC} = 1 + \sqrt{3}$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 内角 ABC の大きさを求める.

余弦定理より

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC} \cos \angle ACB$$

$$= \sqrt{6}^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3}) \cos 45^\circ$$

$$= 6 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3}) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 10 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6$$

$$= 4,$$

よって $\overline{AB} = \sqrt{4} = 2$. 余弦定理より $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\overline{BC} \cos \angle ABC$ なので,

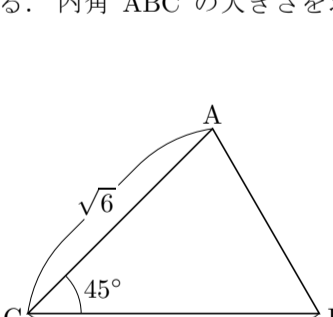
$$\sqrt{6}^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC,$$

$$6 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC,$$

$$4(1 + \sqrt{3}) \cos \angle ABC = 2 + 2\sqrt{3},$$

$$\cos \angle ABC = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2},$$

よって $\angle ABC = 60^\circ$. 終



問題 6.8.5 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AC} = 2$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{3} - 1$ かつ $\angle ACB = 120^\circ$ とします. 内角 ABC の大きさを求めなさい.

例題 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ とする. 内角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の余弦 $\cos \angle BAC$ を求め, 内角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の正弦 $\sin \angle BAC$ を求め, 三角形 ABC の面積を求め.

【解説】 余弦定理より $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\overline{AC} \cos \angle BAC$ なので,

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \angle BAC,$$

$$40 \cos \angle BAC = 8,$$

$$\cos \angle BAC = \frac{1}{5}.$$

$(\sin \angle BAC)^2 + (\cos \angle BAC)^2 = 1$ なので,

$$(\sin \angle BAC)^2 = 1 - (\cos \angle BAC)^2 = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}.$$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ なので $\sin \angle BAC \geq 0$, よって

$$\sin \angle BAC = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \overline{AB}\overline{AC} \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6} . \quad \text{終}$$

問題 6.8.6 平面上の相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において, $\overline{AB} = 4$ かつ $\overline{AC} = 7$ かつ $\overline{BC} = 9$ とします.

(1) 内角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の余弦 $\cos \angle BAC$ を求めなさい.

(2) 内角 BAC の大きさ $\angle BAC$ の正弦 $\sin \angle BAC$ を求めなさい.

(3) 三角形 ABC の面積を求めなさい.