§7.1　関数の意味

4.1 節で述べたように，変数 y が変数 x の関数であるとは，x の値を定めるとそれに応じて y の値が唯一つに定まることです． ここでは更に抽象的な関数の捉え方を述べます．

$\boxed{\text{例解}}$　実数を表す変数 x と y とについて，$y=x^2$ となるとき，x の値を定めると y の値が唯一つに定まりますから，変数 y は変数 x の関数です． この関数 $y=x^2$ は，次のように，x の値に対して y の値を唯一つ定めます：

$x=2$ のとき $y=4$ なので，x の値 2 に対して y の値 4 を定める；
$x=3$ のとき $y=9$ なので，x の値 3 に対して y の値 9 を定める；
$x=4$ のとき $y=16$ なので，x の値 4 に対して y の値 16 を定める；
$\vdots$ ．

変数 x の関数 $y=x^2$ の本質は次のような対応です：

2 に対して 4 を定め，3 に対して 9 を定め，4 に対して 16 を定め，$\cdots$．

これからは，このような対応を関数と考えます． $\boxed{\text{終}}$

ある範囲の対象の各々に対して唯一つの対象を定める対応を関数といい，元の数の範囲を**定義域** (domain) といいます． 関数は一般的に次のように定義されます．

定義　定義域が集合 S である関数とは，集合 S の要素の各々に対して唯一つの対象を定める対応のことである．

数学では関数も一つの対象として扱います． 関数をよく f とか g とか φ とか ψ とかの文字で表します． 関数 f は定義域の各要素 a に対する対象を唯一つ定めます； a に対して f が定める対象を，a における f の値といい，$f(a)$ と書き表します．

本書で扱う関数は，定義域の要素も値も実数である関数に限ります．

$\boxed{\text{例}}$　定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f は，1 に対して 7 を定め，2 に対して 5 を定め，3 に対して 8 を定める対応であるとします． 1 における f の値は 7 で，2 における f の値は 5 で，3 における f の値は 8 です． よって，

$$f(1)=7\ ,\qquad f(2)=5\ ,\qquad f(3)=8\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　定義域が実数全体である関数 f を $f(x)=x^2$ と定めることは，各実数 x における f の値 $f(x)$ を x^2 と定めることです． この関数 f について，例えば，

$$3 \text{ における値は } f(3)=3^2=9 \text{ で，}$$
$$-5 \text{ における値は } f(-5)=(-5)^2=25 \text{ で，}$$
$$\frac{7}{4} \text{ における値は } f\left(\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16} \text{ です．}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　定義域が集合 $\{-2,0,2\}$ である関数 f と g とを次のように定めます：

定義域 $\{-2,0,2\}$ の各要素 x に対して， $f(x)=4x$ ， $g(x)=x^3$ ．

関数 f は，

-2 に対して $4\cdot(-2)=-8$ を，0 に対して $4\cdot 0=0$ を，2 に対して $4\cdot 2=8$ を，

定めます． 関数 g は，

-2 に対して $(-2)^3=-8$ を，0 に対して $0^3=0$ を，2 に対して $2^3=8$ を，

定めます． このように f と g とは同じ対応です． よって f と g とは同じ関数です： $f=g$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　関数 f の定義域は実数全体であり，各実数 x に対して $f(x)=x^2-4x-5$ と定めます． 6 における f の値は

$$f(6)=6^2-4\cdot 6-5=36-24-5=7\ .$$

実数 a について $a+3$ における f の値は

$$\begin{aligned} f(a+3)&=(a+3)^2-4(a+3)-5=a^2+6a+9-4a-12-5\\ &=a^2+2a-8\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.1}}$　関数 f の定義域を実数全体として，各実数 x に対して $f(x)=x^3-4x^2$ と定めます． a は実数とします． -2 における f の値と，$2-\sqrt{5}$ における f の値と，$a-2$ における f の値とを計算しなさい．

関数 f の定義域の要素を表す変数を f の**独立変数**といいます． “ 関数 $f(x)$ ” とは関数 f の独立変数を x とすることを意味します． 具体的な関数として，例えば “ 関数 x^3 ” とは，実数 x に対して x^3 を定める関数のこと，つまり，実数 x について $f(x)=x^3$ となる関数 f のことです． また，独立変数 x の値における関数 f の値 $f(x)$ を表す変数を f の**従属変数**といいます． つまり独立変数 x における f の従属変数は $y=f(x)$ とする変数 y のことです（4.1 節参照）． 独立変数 x における関数 f の従属変数を y とおくとき，“ 関数 $y=f(x)$ ” といいます． 例えば，“関数 $y=3x-2$ ” とは，独立変数 x に対して従属変数 y が $y=3x-2$ となる関数を意味します．

特殊な関数として，関数の値が常に同じである関数を定数関数 (constant function) といいます． つまり，関数 f が定数関数であるとは，f の定義域の任意の要素 u と v とについて $f(u)=f(v)$ となることです．

関数 f の値 $f(x)$ が独立変数 x の 1 次式で表されるとき，f を 1 次関数といいます． 関数 f の値 $f(x)$ が独立変数 x の 2 次式で表されるとき，f を 2 次関数といいます． 関数 f の値 $f(x)$ が独立変数 x の 3 次式で表されるとき，f を 3 次関数といいます． 一般に，自然数 n に対して，関数 f の値 $f(x)$ が独立変数 x の n 次式で表されるとき，f を n 次関数といいます． 関数 f の値 $f(x)$ が独立変数 x の整式で表されるとき，f を**有理整関数**といいます（4.2 節参照）． つまり，定数関数，1 次関数，2 次関数，$\cdots$ などを併せて有理整関数といいます． 更に，関数 f の値 $f(x)$ が独立変数 x の有理式で表されるとき，f を**有理関数**といいます（4.9 節参照）．

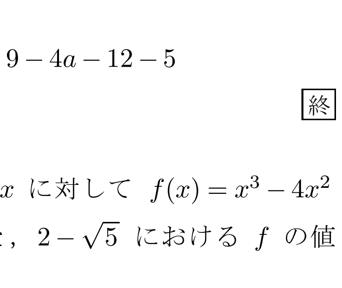
関数 f の**グラフ**とは，x が定義域の要素で $f(x)=y$ である実数 x と y との順序対 (x,y) の全体

$$\{\,(x,y)\mid x \text{ は定義域の要素で } f(x)=y\ \}$$

です．

$\boxed{\text{例}}$　定義域が集合 $\{2,5,6\}$ である関数 f について，2 における値は 3 であり，5 における値は 1 であり，6 における値は 4 であるとします：

$$f(2)=3\ ,\quad f(5)=1\ ,\quad f(6)=4\ .$$



実数 x と y とについて， $f(x)=y$ である条件は， $(x,y)=(2,3)$ または $(x,y)=(5,1)$ または $(x,y)=(6,4)$ です． f のグラフは次の集合です．

$$\{(2,3),(5,1),(6,4)\}$$

f のグラフを座標平面で図示すると右上図のようになります． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.2}}$　定義域が集合 $\{3,4,7\}$ である関数 f について，3 における値は 5 であり，4 における値は 2 であり，7 における値は 6 であるとします：

$$f(3)=5\ ,\quad f(4)=2\ ,\quad f(7)=6\ .$$

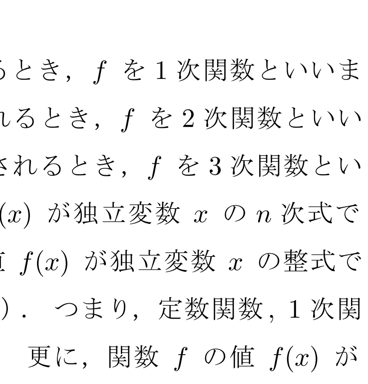
f のグラフを図示しなさい．

$\boxed{\text{例解}}$　定義域が区間 $[1,7]$ である関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{11}{2}$ と定めます． f のグラフは， $1\leq x\leq 7$ かつ $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{11}{2}$ である実数 x と y との順序対 (x,y) の全体

$$\{\,(x,y)\mid 1\leq x\leq 7 \text{ かつ } y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}\ \}$$

です． よって，任意の実数 x,y について，

$$(x,y) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} \iff 1\leq x\leq 7 \text{ かつ } y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}\ .$$



f のグラフを描くために $f(x)$ を表す 2 次式を平方完成します：

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{11}{2}=\frac{1}{2}(x-3)^2+1\ .$$

関数 f の定義域は区間 $[1,7]$ ですから， xy 座標平面において， f のグラフは x 座標が $1\leq x\leq 7$ の範囲に制限された $y=\dfrac{1}{2}(x-3)^2+1$ のグラフです． $\boxed{\text{終}}$

関数 f および任意の実数 x と y について，

$$\text{順序対 } (x,y) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} \iff x \text{ は定義域の要素で } f(x)=y\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　定義域が実数全体である関数 x^2 のグラフを G とおく． 次のような実数 a を求める： $(2a-3,4a)\in G$ ．

$G=\{\,(x,y)\mid x^2=y\,\}$ なので，

$$\begin{aligned} (2a-3,4a)\in G &\iff (2a-3,4a)\in\{\,(x,y)\mid x^2=y\,\}\\ &\iff (2a-3)^2=4a\\ &\iff a^2-4a+\frac{9}{4}=0\\ &\iff a=2\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.1.3}}$　定義域が実数全体である関数 x^3 のグラフを G とおきます． 次のような実数 a を求めなさい： $(a-2,7a-20)\in G$ ．