

§ 7.2 関数の値域

関数 f の値の全体を f の**値域** (range) といいます。

定義 関数 f の値域とは、 f の定義域の要素 x における f の値 $f(x)$ の全体

$$\{y \mid y = f(x) \text{ となる } f \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある}\}$$

である。

例 定義域が集合 $\{2, 3, 6\}$ である関数 f を次のように定めます：

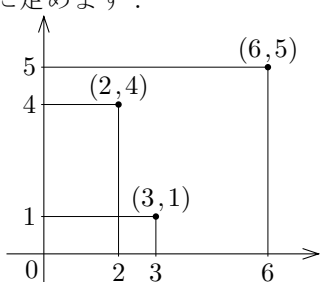
$$f(2) = 4, \quad f(3) = 1, \quad f(6) = 5.$$

この関数の値域は次の集合です：

$$\{f(2), f(3), f(6)\} = \{4, 1, 5\} = \{1, 4, 5\}.$$

この関数のグラフは次の集合です：

$$\{(2, 4), (3, 1), (6, 5)\}$$



この集合を座標平面で図示すると右上図のようになります。

終

問題 7.2.1 定義域が集合 $\{2, 5, 7, 8\}$ である関数 f を次のように定めます：

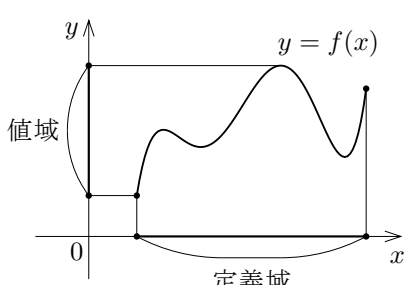
$$f(2) = 3, \quad f(5) = 9, \quad f(7) = 6, \quad f(8) = 4.$$

関数 f の値域を求めなさい。

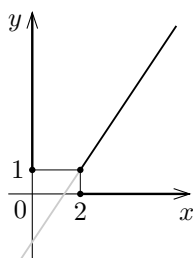
関数 f の独立変数を x とおき従属変数を y とおきます： $y = f(x)$ 。独立変数 x は f の定義域の要素を表す変数ですから、 f の定義域が x の値の範囲です。また、 f の値域は $f(x)$ の値つまり従属変数 y の値の範囲です。ですから、 xy 座標平面において、

関数 f の定義域は $y = f(x)$ のグラフに属す点の x 座標の全体で、

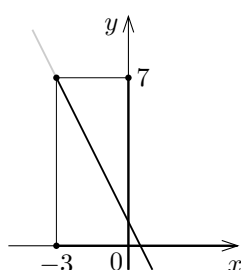
関数 f の値域は $y = f(x)$ のグラフに属す点の y 座標の全体です。



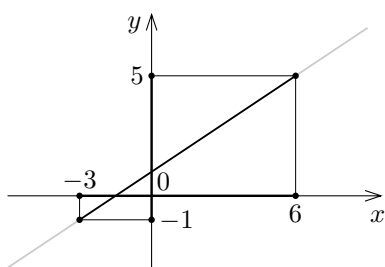
例 幾つかの1次関数について xy 座標平面における定義域と値域とを図示します。



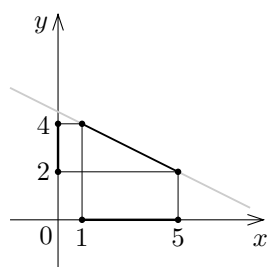
定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 $y = \frac{3}{2}x - 2$ のグラフ：値域は区間 $[1, \infty)$ 。



定義域が区間 $[-3, \infty)$ である関数 $y = -2x + 1$ のグラフ：値域は区間 $(-\infty, 7]$ 。



定義域が区間 $[-3, 6]$ である関数 $y = \frac{2}{3}x + 1$ のグラフ：値域は区間 $[-1, 5]$ 。



定義域が区間 $[1, 5]$ である関数 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ のグラフ：値域は区間 $[2, 4]$ 。

終

問題 7.2.2 以下の1次関数について、グラフの概形を描いて値域を求めなさい。

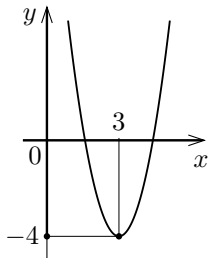
(1) 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 $\frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$ 。

(2) 定義域が区間 $[-6, \infty)$ である関数 $-\frac{2}{3}x - 1$ 。

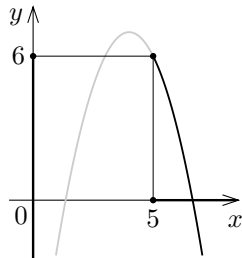
(3) 定義域が区間 $[-1, 5]$ である関数 $2x - 3$ 。

(4) 定義域が区間 $[-2, 6]$ である関数 $-\frac{3}{2}x + 5$ 。

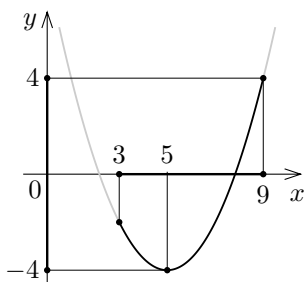
例 幾つかの2次関数について xy 座標平面における定義域と値域とを図示します。



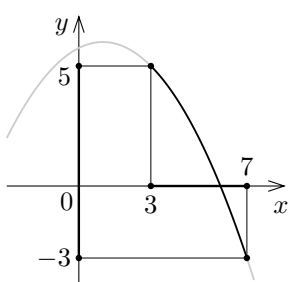
実数全体定義域とする関数 $y = 2(x - 3)^2 - 4$ のグラフ：値域は区間 $[-4, \infty)$ 。



定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 $y = -(x - 4)^2 + 7$ のグラフ：値域は区間 $(-\infty, 6]$ 。



定義域が区間 $[3, 9]$ である関数 $y = \frac{1}{2}(x - 5)^2 - 4$ のグラフ：値域は区間 $[-4, 4]$ 。



定義域が区間 $[3, 7]$ である関数 $y = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 6$ のグラフ：値域は区間 $[-3, 5]$ 。

終

問題 7.2.3 以下の2次関数について、グラフの概形を描いて値域を求めなさい。

(1) 定義域が実数全体である関数 $-2(x - 3)^2 + 7$ 。

(2) 定義域が区間 $[3, \infty)$ である関数 $\frac{1}{2}(x - 5)^2 - 4$ 。

(3) 定義域が区間 $[2, 8]$ である関数 $-\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 3$ 。

(4) 定義域が区間 $[1, 4]$ である関数 $\frac{1}{3}(x - 7)^2 - 8$ 。