

§ 7.4 関数の最大値と最小値

関数の f の**最大値** (maximum value) とは f の値域のなかで最も大きい実数のことで、関数 f の**最小値** (minimum value) とは f の値域のなかで最も小さい実数のことです。正確に述べると次のようになります。

定義 関数 f の定義域に属す実数 p について、 f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最大値という。また、 f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最小値という。

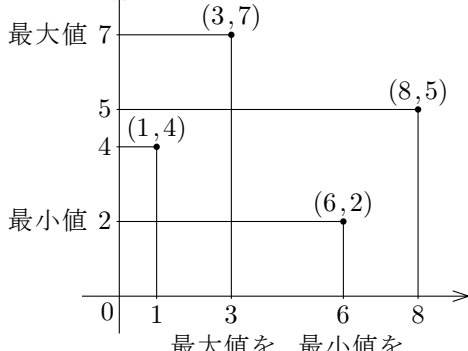
例 定義域が集合 $\{1, 3, 6, 8\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合です：

$$\{(1, 4), (3, 7), (6, 2), (8, 5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになります。この関数の値域は集合 $\{2, 4, 5, 7\}$ です。 f の最大値は値域の要素で最大の実数 7 で、 f の最小値は値域の要素で最小の実数 2 です。 f は、3 において最大値 7 をとり、6 において最小値 2 をとります。



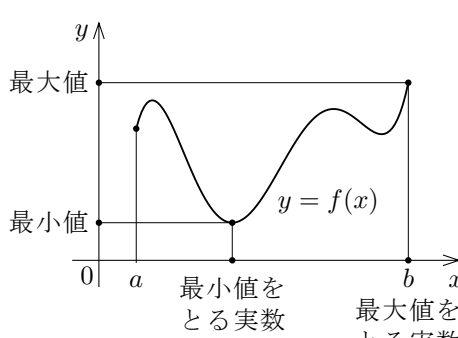
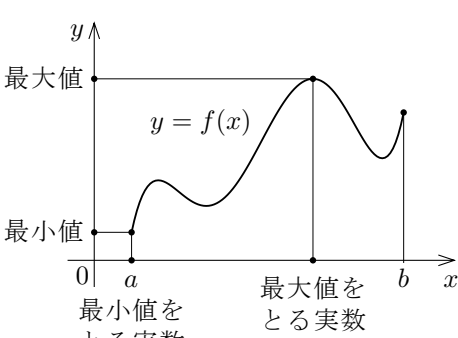
終

問題 7.4.1 定義域が集合 $\{2, 5, 7, 9\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(2) = 4, \quad f(5) = 8, \quad f(7) = 3, \quad f(9) = 6.$$

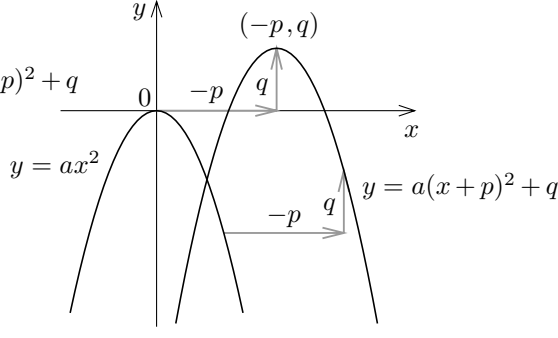
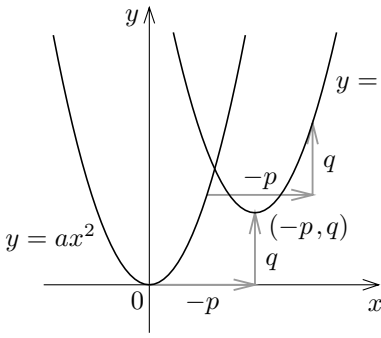
関数 f の最大値・最小値を求めなさい。どの実数において最大値・最小値をとるかも記しなさい。

実数 a と b について $a < b$ とします。定義域が区間 $[a, b]$ である関数 f のグラフにおいて、最大値・最小値は例えば次の図のようになります。



関数の最大値・最小値は無いこともあります。

2次関数について最大値・最小値を考えます。定義域が実数全体である2次関数 f の値を表す2次式を平方完成します： $f(x) = a(x+p)^2 + q$ (a, p, q は定数で $a \neq 0$)。4.7節において次のことを述べました： xy 座標平面において、関数 $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフは、関数 $y = ax^2$ のグラフを平行移動させた図形で、その頂点は $(-p, q)$ である。



$a > 0$ のときの $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフ $a < 0$ のときの $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフ

これらのグラフを見ると分かるように、定義域が実数全体である2次関数 $f(x) = a(x+p)^2 + q$ について次のことが成り立ちます：

(1) $a > 0$ のとき、区間 $(-\infty, -p]$ において単調減少で区間 $[-p, \infty)$ において単調増加なので、実数 $-p$ において最小値 q をとり、最大値はない；

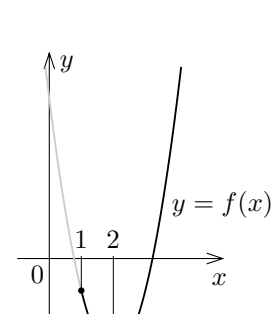
(2) $a < 0$ のとき、区間 $(-\infty, -p]$ において単調増加で区間 $[-p, \infty)$ において単調減少なので、実数 $-p$ において最大値 q をとり、最小値はない。

例題 定義域が区間 $[1, \infty)$ である2次関数 f を $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ と定める。関数 f の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）。

【解説】 $f(x)$ の値を表す2次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 5 = 2(x^2 - 4x) + 5 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 5 \\ &= 2(x-2)^2 - 3. \end{aligned}$$

これより、 f は、区間 $[1, 2]$ で単調減少であり、区間 $[2, \infty)$ で単調増加である。従って関数 f は 2 において最小値 $f(2) = -3$ をとる。 f の最大値はない。



終

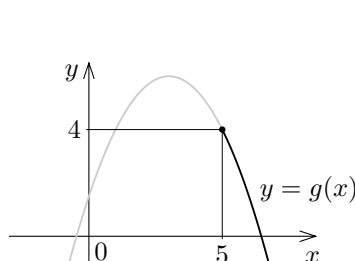
問題 7.4.2 定義域が区間 $[-1, \infty)$ である2次関数 f を $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$ と定めます。関数 f の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）。

例題 定義域が区間 $[5, \infty)$ である2次関数 g を $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$ と定める。関数 g の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）。

【解説】 $g(x)$ の値を表す2次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 6. \end{aligned}$$

これより、 g は区間 $[5, \infty)$ で単調減少である。従って、関数 g は 5 において最大値 $g(5) = 4$ をとる。 g の最小値はない。



終

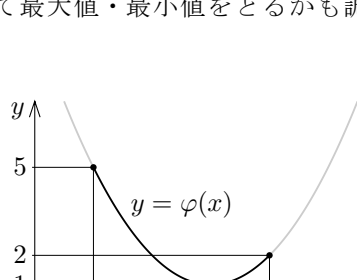
問題 7.4.3 定義域が区間 $[1, \infty)$ である2次関数 g を $g(x) = -\frac{x^2 + 4x - 11}{3}$ と定めます。関数 g の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）。

例題 定義域が区間 $[2, 8]$ である2次関数 φ を $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$ と定める。関数 φ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）。

【解説】 $\varphi(x)$ の値を表す2次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10 = \frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) - 9 + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x-6)^2 + 1. \end{aligned}$$

これより、 φ は、区間 $[2, 6]$ で単調減少であり、区間 $[6, 8]$ で単調増加である。従って、関数 φ は 6 において最小値 $\varphi(6) = 1$ をとる。 $\varphi(2) = 5$ 、 $\varphi(8) = 2$ なので、 φ は 2 において最大値 5 をとる。



終

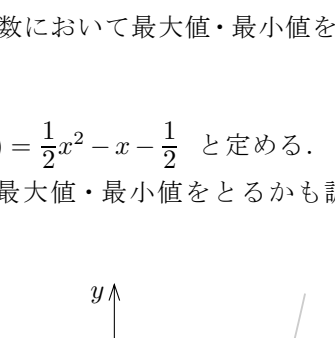
問題 7.4.4 定義域が区間 $[-1, 2]$ である2次関数 φ を $\varphi(x) = 3x^2 - 4x - 1$ と定めます。関数 φ の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）。

例題 定義域が区間 $[3, 5]$ である2次関数 ψ を $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$ と定める。関数 ψ の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）。

【解説】 $\psi(x)$ の値を表す2次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1. \end{aligned}$$

これより、 ψ は区間 $[3, 5]$ で単調増加である。従って関数 ψ は、3 において最小値 $\psi(3) = 1$ をとり、5 において最大値 $\psi(5) = 7$ をとる。



終

問題 7.4.5 定義域が区間 $[-1, 2]$ である2次関数 ψ を $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$ と定めます。関数 ψ の最大値・最小値を調べなさい（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べなさい）。