

§ 7.6 逆関数

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とします. f によって, x の値に対して y の値が唯一つ定まります. 逆に, y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき, y の値に対して x の値を定める関数ができます. この関数を f の**逆関数** (inverse function) といいます.

定義 関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つであるとき, 関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい, f^{-1} と書き表す. 関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である.

例 定義域が集合 $\{3, 5, 9\}$ である関数 f を次のように定めます:

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2, 6, 8\}$ です. $f(x) = 2$ となる数 x は 5 だけです. $f(x) = 6$ となる数 x は 9 だけです. $f(x) = 8$ となる数 x は 3 だけです. このように, f の値域 $\{2, 6, 8\}$ の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つ定まります. よって f の逆関数 f^{-1} があります. f^{-1} の定義域は $\{2, 6, 8\}$ であり,

$$f^{-1}(2) = 5, \quad f^{-1}(6) = 9, \quad f^{-1}(8) = 3. \quad \text{終}$$

問題 7.6.1 定義域が集合 $\{0, 4, 6\}$ である関数 f を次のように定めます:

$$f(0) = 7, \quad f(4) = 1, \quad f(6) = 5.$$

関数 f の逆関数を調べなさい.

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定めます. この関数 f の値域は区間 $[9, \infty)$ です. この区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x を求めます. $y = x + 4$ とすると, $x = y - 4$, $y \geq 9$ なので $x = y - 4 \geq 5$. このように, 区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x は $x = y - 4$ と唯一つに定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $f^{-1}(y) = y - 4$. 通常 f^{-1} についても独立変数を x にします. f の逆関数 f^{-1} の定義域である区間 $[9, \infty)$ の各実数 x に対して $f^{-1}(x) = x - 4$. 終

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定めます. この関数 g の値域は区間 $[6, \infty)$ です. この区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x を求めます. $y = 3x$ とすると, $x = \frac{y}{3}$, $y \geq 6$ なので $x = \frac{y}{3} \geq 2$. このように, 区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x は $x = \frac{y}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1} の定義域である区間 $[6, \infty)$ の各実数 y について $g^{-1}(y) = \frac{y}{3}$. 通常 g^{-1} についても独立変数を x にします. g の逆関数 g^{-1} の定義域である区間 $[6, \infty)$ の各実数 x について $g^{-1}(x) = \frac{x}{3}$. 終

大雑把にいうと, 関数 $x + 4$ の逆関数は関数 $x - 4$ で, 関数 $3x$ の逆関数は関数 $\frac{x}{3}$ です. このように, 関数 f の逆関数とは, f の計算と逆の計算をする関数です.

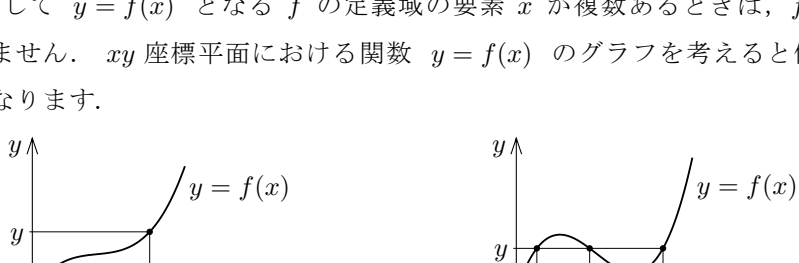
例題 定義域が区間 $[0, 3]$ である関数 f を $f(x) = 2x + 3$ と定める. f の逆関数を調べる.

【注意】 f^{-1} の定義域つまり f の値域の要素を表す変数を初めから x にしてみる.

【解答】 f の値域は区間 $[3, 9]$ である. この区間 $[3, 9]$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, 3]$ の実数 y を求める. $2y + 3 = x$ とすると, $2y = x - 3$, $y = \frac{x - 3}{2}$; また $3 \leq x \leq 9$ なので $0 \leq y \leq 3$. 区間 $[3, 9]$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, 3]$ の実数 y が唯一つ定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[3, 9]$ の各実数 x に対して $f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$. 終

問題 7.6.2 定義域が区間 $[2, 4]$ である関数 g を $g(x) = 13 - 3x$ と定めます. g の逆関数を調べなさい.

関数 f の逆関数は, f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定めます. 関数は唯一つの対象を定める対応ですから, f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が複数あるときは, f の逆関数がありません. xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフを考えると例えば次のようになります.



y に対して $y = f(x)$ となる x が唯一つあるので, 関数 f の逆関数がある. 以上あるので, 関数 f の逆関数はない.

例 定義域が実数全体である関数 f を $f(x) = x^2$ と定めます. 例えば 7 に対して, $f(x) = 7$ とすると, $x^2 = 7$ なので, $x = \sqrt{7}$ または $x = -\sqrt{7}$; このように x の値が唯一つではありません. よって関数 f の逆関数はありません. 終

逆関数について以下の定理が成り立ちます.

定理 7.6.1 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, 任意の対象 u と v について,

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u.$$

証明 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 u と v について, $f(u) = v$ ならば, f の逆関数 f^{-1} は v に対して u を定めるので $f^{-1}(v) = u$. 実数 u と v について, $f^{-1}(v) = u$ となるのは $f(u) = v$ のときなので, $f^{-1}(v) = u$ ならば $f(u) = v$. 故に, 任意の対象 u と v について, $f(u) = v$ ならば $f^{-1}(v) = u$, かつ, $f^{-1}(v) = u$ ならば $f(u) = v$. (証明終り)

定理 7.6.2 関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は f の定義域である.

証明 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 y について,

$$y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \\ \iff y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある}$$

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である. また, f^{-1} の定義域は f の定義域である.

$$y = f^{-1}(x) \text{ となる } f^{-1} \text{ の定義域の要素 } x \text{ がある} \\ \iff x = f(y) \text{ となる } f \text{ の値域の要素 } x \text{ がある} \\ \iff y \text{ は } f \text{ の定義域に属す.}$$

よって

$$y \text{ が } f^{-1} \text{ の値域に属す} \iff y \text{ は } f \text{ の定義域に属す.}$$

故に f^{-1} の値域と f の定義域と同じである. (証明終り)

次の定理は重要です.

定理 7.6.3 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ について } f^{-1}(f(x)) = x,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } y \text{ について } f(f^{-1}(y)) = y.$$

証明 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. f の定義域の要素 x について, $y = f(x)$ とおくと, 定理 7.6.1 より $x = f^{-1}(y)$ なので, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

f の値域の要素 y について, $x = f^{-1}(y)$ とおくと, 定理 7.6.1 より $y = f(x)$ なので, $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. (証明終り)

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, f の定義域の要素 x に対して $f^{-1}(f(x)) = x$ なので, f^{-1} は x における f の値 $f(x)$ を x に戻す関数です.

逆関数について更に以下の定理が成り立ちます.

定理 7.6.4 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

証明 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ とする. f の定義域の各要素 x_1, x_2 及び f の値域の各要素 y について, $f(x_1) = y$ かつ $f(x_2) = y$ ならば, $g(f(x_1)) = g(y)$ かつ $g(f(x_2)) = g(y)$, $x_1 = g(y)$ かつ $x_2 = g(y)$, よって $x_1 = x_2$. 関数 f の値域の各要素 y に対して, $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x は唯一つであり, $g(y) = g(f(x)) = x$ なので

$$f(g(y)) = f(x) = y.$$

関数 g は, 関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ である x を定めるので, f の逆関数である. (証明終り)

定理 7.6.5 関数 g が関数 f の逆関数であるとき, f は g の逆関数である.

証明 関数 g が関数 f の逆関数であるとする. 定理 7.6.2 より f の定義域は g の値域である. 定理 7.6.3 より, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$. 定理 7.6.4 より g は f の逆関数である. (証明終り)