§7.7　逆関数のグラフ

$\boxed{\text{例解}}$　定義域が集合 $\{1,2,3\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(1) = 5\ ,\quad f(2) = 7\ ,\quad f(3) = 9\ .$$

f の逆関数 f^{-1} は次のようになります：

$$f^{-1}(5) = f^{-1}\big(f(1)\big) = 1\ ,\quad f^{-1}(7) = f^{-1}\big(f(2)\big) = 2\ ,\quad f^{-1}(9) = f^{-1}\big(f(3)\big) = 3\ .$$

グラフは次のようになります：

f のグラフは集合 $\{(1,5),(2,7),(3,9)\}$ であり，
f^{-1} のグラフは集合 $\{(5,1),(7,2),(9,3)\}$ である.　$\boxed{\text{終}}$

　このように，関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは成分が入れ替わります.

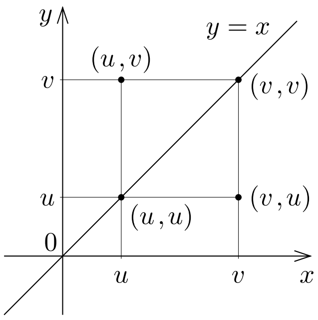
$\boxed{\text{問題 7.7}}$　定義域が集合 $\{1,3,5\}$ である関数 f を次のように定めます：

$$f(1) = 4\ ,\quad f(3) = 6\ ,\quad f(5) = 8\ .$$

f の逆関数 f^{-1} のグラフを求めなさい.

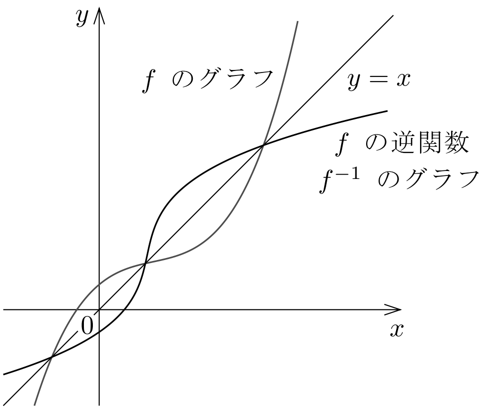
補助定理　任意の実数 u,v について，xy 座標平面において点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である.

証明　$u \neq v$ のとき，xy 座標平面において点 (u,u) と (u,v) と (v,v) と (v,u) とは正方形の頂点であり，正方形の頂点 (u,u) と (v,v) とを結ぶ対角線は直線 $y=x$ に含まれる．よって点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である.



　$u = v$ のとき，$(u,v) = (v,u)$ で，この点は xy 座標平面において直線 $y=x$ に属す．よって点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である.　（証明終り）

　関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは成分が入れ替わります．xy 座標平面において，関数 f のグラフの点と対応する逆関数 f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わります．x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y=x$ に関して対称です．従って，f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です.



定理 7.7　xy 座標平面において，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である.

証明　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする．u を f の定義域の実数とし，v を f の値域の実数とする．定理 7.6.1 より

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u\ ;$$

従って，

$$\begin{aligned}\text{点 } (u,v) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} &\iff f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \\ &\iff \text{点 } (v,u) \text{ が } f^{-1} \text{ のグラフに属す}\ .\end{aligned}$$

上述の補助定理より，点 (u,v) と点 (v,u) とは直線 $y=x$ に関して対称である．従って f のグラフと f^{-1} のグラフとは直線 $y=x$ に関して対称である.

（証明終り）