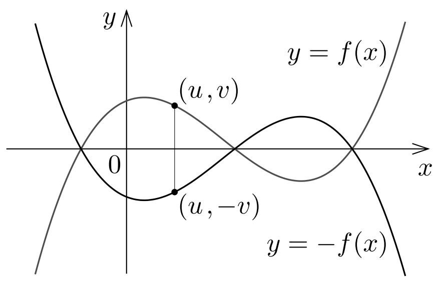
§7.8　関数のグラフの座標軸及び原点に関する対称移動

xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(x)$ のグラフを考えます．実数 u,v について，

$$
\begin{aligned}
&\text{点 } (u,-v) \text{ が関数 } y=-f(x) \text{ のグラフに属す}\\
\iff\ & -v=-f(u) \iff v=f(u)\\
\iff\ & \text{点 } (u,v) \text{ が関数 } y=f(-x) \text{ のグラフに属す}\ .
\end{aligned}
$$

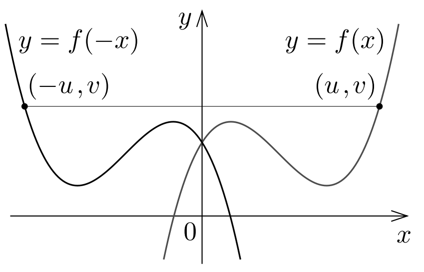
$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 (u,v) に対する点 $(u,-v)$ の全体です．点 $(u,-v)$ は点 (u,v) と x 軸に関して対称です．よって $y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称です．



xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=f(-x)$ のグラフを考えます．実数 u,v について，

$$
\begin{aligned}
&\text{点 } (-u,v) \text{ が関数 } y=f(-x) \text{ のグラフに属す}\\
\iff\ & v=f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u)\\
\iff\ & \text{点 } (u,v) \text{ が関数 } y=f(-x) \text{ のグラフに属す}\ .
\end{aligned}
$$

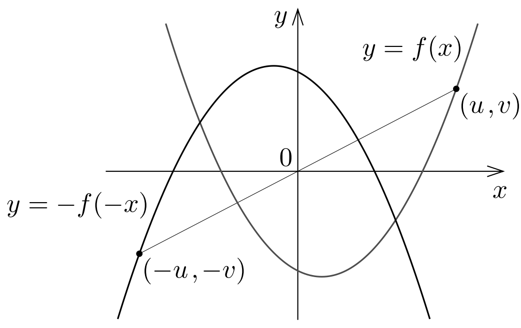
$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 (u,v) に対する点 $(-u,v)$ の全体です．点 $(-u,v)$ は点 (u,v) と y 軸に関して対称です．よって $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称です．



xy 座標平面において，関数 $y=f(x)$ のグラフと関数 $y=-f(-x)$ のグラフを考えます．実数 u,v について，

$$
\begin{aligned}
&\text{点 } (-u,-v) \text{ が関数 } y=-f(-x) \text{ のグラフに属す}\\
\iff\ & -v=-f\bigl(-(-u)\bigr) \iff v=f(u)\\
\iff\ & \text{点 } (u,v) \text{ が関数 } y=f(x) \text{ のグラフに属す}\ .
\end{aligned}
$$

$y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフに属す各点 (u,v) に対する点 $(-u,-v)$ の全体です．点 $(-u,-v)$ は点 (u,v) と原点に関して対称です．よって $y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと原点に関して対称です．



定理 7.8.1　関数 f について以下のことが成り立つ．

(1)　xy 座標平面において，$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である．

(2)　xy 座標平面において，$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

(3)　xy 座標平面において，$y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと原点に関して対称である．

関数 f が**偶関数** (even function) であるとは，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について}\quad f(-x)=f(x)$$

となることです．また，関数 f が**奇関数** (odd function) であるとは，

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について}\quad f(-x)=-f(x)$$

となることです．

$\boxed{\text{例}}$　定義域が実数全体である関数 x^2 を f とおきます：$f(x)=x^2$ ．任意の実数 x について

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)\ .$$

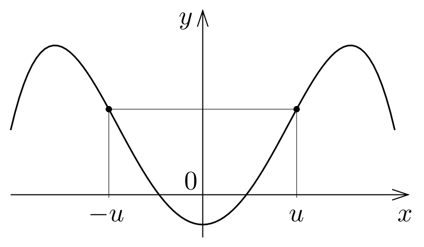
従って，関数 f つまり関数 x^2 は偶関数です．この他，関数 x^4 , 関数 x^6 , 関数 x^8 なども偶関数です．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　定義域が実数全体である関数 x^3 を g とおきます：$g(x)=x^3$ ．任意の実数 x について，

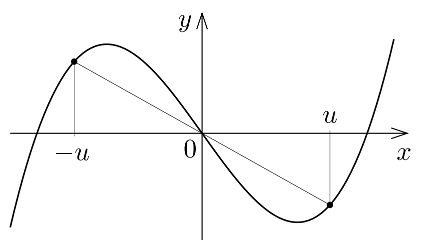
$$g(-x)=(-x)^3=-x\cdot(-x)^2=-x\cdot x^2=-x^3=-g(x)\ .$$

従って，関数 g つまり関数 x^3 は奇関数です．この他，関数 x^5 , 関数 x^7 , 関数 x^9 なども奇関数です．　$\boxed{\text{終}}$

偶関数・奇関数のグラフは例えば次のようになります．



偶関数のグラフの例



奇関数のグラフの例

次の定理が成り立ちます．

定理 7.8.2　xy 座標平面において，偶関数のグラフは y 軸に関して対称であり，奇関数のグラフは原点に関して対称である．

証明　関数 f が偶関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x)=f(x)$ ．xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフと $y=f(-x)$ のグラフとは一致する．定理 7.8.1 より，$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称なので，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

関数 f が奇関数であるとする：f の定義域の任意の点 x について $f(-x)=-f(x)$ よって $f(x)=-f(-x)$ ．xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフと $y=-f(-x)$ のグラフとは一致する．定理 7.8.1 より，$y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと原点に関して対称なので，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である．

（証明終り）