第７章の補遺２　関数の正体

関数とは唯一つのものを定める対応であると述べましたが，それでは対応とは何か，疑問が残るかもしれません． 対応とは何か，関数とは何か，数学的な定義を述べます．

0.8 節で述べたように，集合 A と B とに対して，A の要素 x と B の要素 y との順序対 (x,y) の全体を A と B との直積集合といい，$A\times B$ と書き表します：

$$A\times B=\{\,(x,y)\mid x\in A \text{ かつ } y\in B\,\}\ .$$

A と B との直積集合 $A\times B$ の部分集合 C を考えます． A の要素 x に B の要素 y とについて，$(x,y)\in C$ のときにだけ x に y が対応すると考えます：

$$x \text{ に } y \text{ が対応する} \iff (x,y)\in C\ .$$

この集合 C が対応であると考えます． つまり，対応とは，数学的には，直積集合の部分集合のことです．

$\boxed{\text{例}}$ 集合 $A=\{1,2,3\}$ と集合 $B=\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ との直積集合 $A\times B$ は次のようになります：

$$A\times B=\{(1,\mathrm{a}),(1,\mathrm{b}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a}),(3,\mathrm{b})\}\ .$$

例えばこの直積集合 $A\times B$ の部分集合

$$\{(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{b})\}$$

が対応です；この対応では，1 に a が対応し，2 に a と b とが対応し，3 に b が対応します． $\boxed{\text{終}}$

集合 S を定義域とする対応とは，S とある集合 T の直積集合

$$S\times T=\{\,(x,y)\mid x\in S \text{ かつ } y\in T\,\}$$

の部分集合のことです． そして，集合 S を定義域とする対応 C が関数であるとは，S の各要素 x に対して $(x,y)\in C$ となる y が唯一つに定まることです．

$\boxed{\text{例}}$ 集合 $S=\{1,2,3\}$ を定義域とする対応を考えます． a と b とは異なるものとします． S を定義域とする対応 $\{\,(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{b})\,\}$ は関数ではありません；何故なら，2 に a と b と異なる２つのものが対応します． S を定義域とする対応 $\{\,(1,\mathrm{a}),(3,\mathrm{b})\,\}$ は関数ではありません；何故なら，2 に対応するものがありません． S を定義域とする対応 $\{\,(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a})\,\}$ は関数です：1 に a だけが対応し，2 に b だけが対応し，3 に a だけが対応します． $\boxed{\text{終}}$

集合 S を定義域とする関数 f について，S の各要素 x に対して $(x,y)\in f$ となる y が唯一つに定まります；この y を x に対する f の値といい，$f(x)$ と書き表しました． つまり次のようになります：

$$y=f(x) \iff (x,y)\in f\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 集合 $S=\{1,2,3\}$ を定義域とする対応を考えます． a と b とは異なるものとします． S を定義域とする対応 $f=\{\,(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a})\,\}$ は関数です． この関数 f について次のようになります： $(1,\mathrm{a})\in f$ なので $f(1)=\mathrm{a}$ ， $(2,\mathrm{b})\in f$ なので $f(2)=\mathrm{b}$ ， $(3,\mathrm{a})\in f$ なので $f(3)=\mathrm{a}$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする 1 次関数 f を $f(x)=2x+3$ と定めるということは， $f=\{\,(x,2x+3)\mid x \text{ は実数}\,\}$ と定めることです． 区間 $[0,7]$ を定義域とする 2 次関数 g を $g(x)=x^2$ （ $0\leq x\leq 7$ ） と定めることは，$g=\{\,(x,x^2)\mid x \text{ は実数で } 0\leq x\leq 7\,\}$ と定めることです． $\boxed{\text{終}}$

関数 f について，

$$\text{各実数 } x,y \text{ について} \quad (x,y)\in f \iff y=f(x)$$

なので，f は，$y=f(x)$ となる実数 x と y との順序対 (x,y) の全体，つまり f のグラフです． このように，関数 f のグラフが f の正体です．