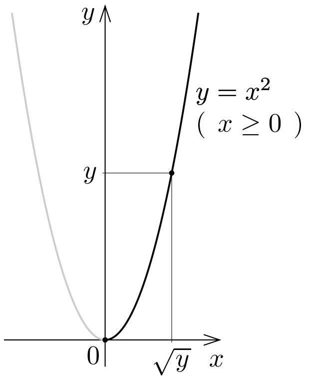
§8.1　平方の逆関数

関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つであるとき，f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応が f の逆関数です.

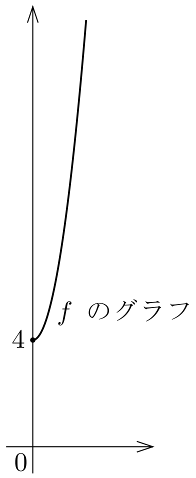
関数 x^2 の逆関数を考えます．実数 x,y について $y=x^2$ とします．$x^2\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．$x=\pm\sqrt{y}$ なので，y に対する x が唯一つとは限りません．しかし，$x\geq 0$ とすると，$y\geq 0$ である実数 y に対して $y=x^2$ である実数 x は $x=\sqrt{y}$ と唯一つに定まります．故に，関数 x^2 の定義域を定義域を区間 $[0,\infty)$ に制限すると，関数 $\sqrt{y}$ というより関数 $\sqrt{x}$ が逆関数になります．つまり，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 x^2 の逆関数は，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $\sqrt{x}$ です.



2 次関数の逆関数を調べます.

例題　定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=3x^2+4$ と定める．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる.

〔解説〕関数 f の値域は区間 $[4,\infty)$ ．この区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y を求める．$f(y)=x$ つまり $3y^2+4=x$ より，$3y^2=x-4$ ，$y^2=\dfrac{x-4}{3}$ ，$y=\pm\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ；y は区間 $[0,\infty)$ に属すので $y\geq 0$ ，よって $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．このように，区間 $[4,\infty)$ の各実数 x に対して $f(y)=x$ となる区間 $[0,\infty)$ の実数 y が唯一つ定まり，$y=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$ ．故に，関数 f の逆関数 f^{-1} があり，f^{-1} の定義域は区間 $[4,\infty)$ であり，$f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{3}}$.

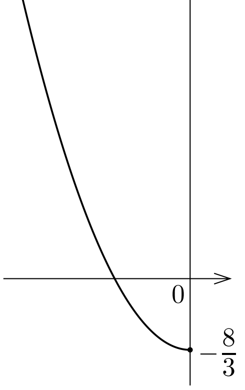


終

問題 8.1.1　定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 f を $f(x)=5x^2-7$ と定めます．この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べなさい.

例解　定義域が区間 $(-\infty,0]$ である関数 g を $g(x)=\dfrac{x^2-8}{3}$ と定める．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる.

〔解説〕関数 g の値域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ ．この区間 $\left[\dfrac{8}{3},\infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 y を求める．$g(y)=x$ つまり $\dfrac{y^2-8}{3}=x$ なので，$y^2-8=3x$ ，$y^2=3x+8$ ，$y=\pm\sqrt{3x+8}$ ；y は区間 $(-\infty,0]$ に属すので $y\leq 0$ ，よって $y=-\sqrt{3x+8}$ ．このように，区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ の各実数 x に対して $g(y)=x$ となる区間 $(-\infty,0]$ の実数 y が唯一つ定まり，$y=-\sqrt{3x+8}$ ．故に，関数 g の逆関数 g^{-1} があり，g^{-1} の定義域は区間 $\left[-\dfrac{8}{3},\infty\right)$ であり，$g^{-1}(x)=-\sqrt{3x+8}$.



終

問題 8.1.2　定義域が区間 $(-\infty,0]$ である関数 g を $g(x)=\dfrac{x^2+5}{2}$ と定めます．この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べなさい.