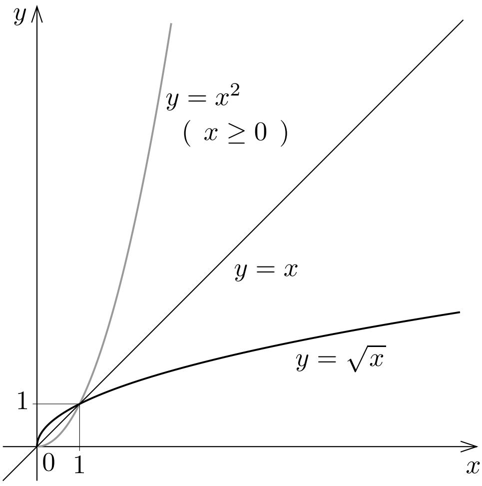
§8.2　簡単な無理関数のグラフ

xy 座標平面において，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを描きます．関数 g が関数 f の逆関数であるとき，$y=g(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です（定理 7.7）．8.1 節で述べたように，関数 $\sqrt{x}$ （ $x\geq 0$ ）は関数 x^2 （ $x\geq 0$ ）の逆関数です；従って $y=\sqrt{x}$ （ $x\geq 0$ ）のグラフは $y=x^2$ （ $x\geq 0$ ）のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です．

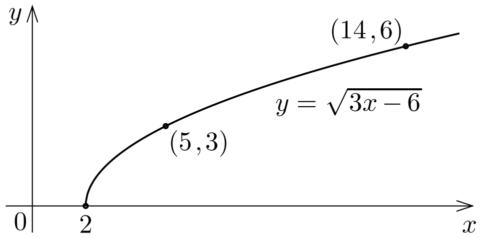


1 次関数と関数 $\sqrt{x}$ との合成関数のグラフを考えます．

$\boxed{\text{例解}}$　xy 座標平面において，定義域が区間 $[2,\infty)$ である関数 $y=\sqrt{3x-6}$ のグラフを描きます．関数 $y=\sqrt{3x-6}$ について，$\sqrt{3x-6}\geq 0$ なので $y\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3x-6}$ を 2 乗すると $y^2=\sqrt{3x-6}^{\,2}=3x-6$ なので，$3x=y^2+6$ ，よって $x=\dfrac{1}{3}y^2+2$ ．これより，実数 x,y （ $x\geq 2$ ）について，

$$y=\sqrt{3x-6}\iff x=\frac{1}{3}y^2+2 \text{ かつ } y\geq 0 \quad .$$

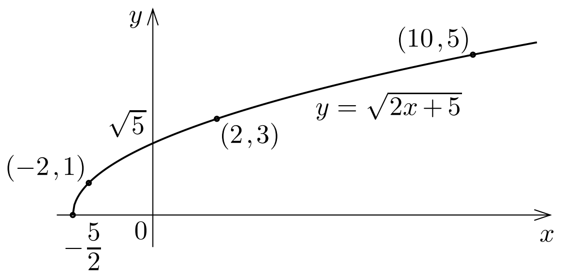
変数 x は変数 y の 2 次関数ですから，そのグラフは放物線になります．$y=0$ のとき $x=2$ ．$y=3$ のとき $x=5$ ．$y=6$ のとき $x=14$ ．点 $(2,0),(5,3),(14,6)$ が $y=\sqrt{3x+6}$ のグラフに属します．



終

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{5}{2},\infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{2x+5}$ のグラフを描く．

〔解答〕 $y=\sqrt{2x+5}\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{2x+5}$ より，$y^2=2x+5$ ，$x=\dfrac{y^2-5}{2}$ ．$y=\sqrt{2x+5}$ のグラフは，不等式 $y\geq 0$ と方程式 $x=\dfrac{y^2-5}{2}$ とで表される放物線であり，点 $\left(-\dfrac{5}{2},0\right),\left(0,\sqrt{5}\right),(-2,1),(2,3),(10,5)$ が属す．

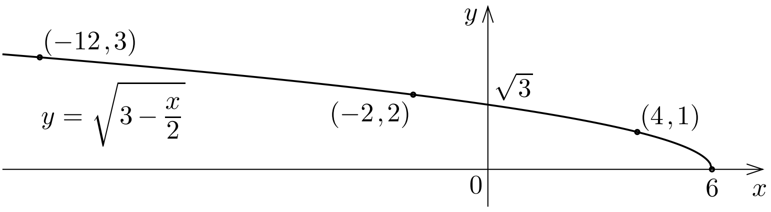


終

$\boxed{\text{問題 8.2.1}}$　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{4}{3},\infty\right)$ である関数 $y=\sqrt{3x+4}$ のグラフの概形を描きなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において定義域が区間 $(-\infty,6]$ である関数 $y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ のグラフを描く．

〔解答〕 $y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}\geq 0$ ．また，$y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ より，$y^2=3-\dfrac{x}{2}$ ，$x=6-2y^2$ ．$y=\sqrt{3-\dfrac{x}{2}}$ のグラフは，不等式 $y\geq 0$ と方程式 $x=6-2y^2$ とで表される放物線であり，点 $(6,0),\left(0,\sqrt{3}\right),(4,1),(-2,2),(-12,3)$ が属す．



終

$\boxed{\text{問題 8.2.2}}$　xy 座標平面において定義域が区間 $\left(-\infty,\dfrac{15}{2}\right]$ である関数 $y=\sqrt{5-\dfrac{2}{3}x}$ のグラフの概形を描きなさい．