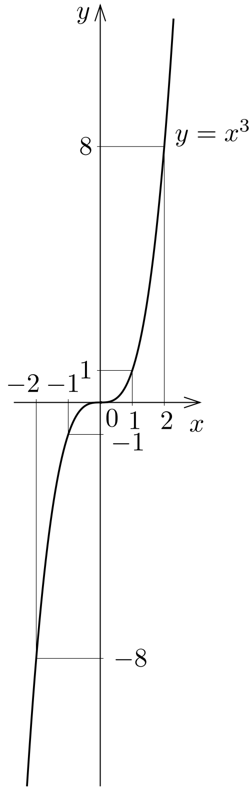
§8.3　立方の逆関数

7.6 節で述べたように，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ である f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の逆関数 f^{-1} があります.

実数 x の 3 乗 x^3 を x の立方ということがあります.



定義域が実数全体であ冪関数 x^3 を f とおきます：$f(x)=x^3$ ．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフを見ると分かるように，任意の実数 y に対して $y=f(x)$ となる実数 x が唯一つあるので，関数 f の逆関数 f^{-1} があります．f の値域は実数全体ですから，その逆関数 f^{-1} の定義域は実数全体です．f^{-1} の値 $f^{-1}(x)$ を $\sqrt[3]{x}$ と書き表します：$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ ．任意の実数 a について，定理 7.6.3 より，$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)=a$ ，$f\bigl(f^{-1}(a)\bigr)=a$ ；ここで，

$$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)=\sqrt[3]{f(a)}=\sqrt[3]{a^3}\ ,$$
$$f\bigl(f^{-1}(a)\bigr)=\{f^{-1}(a)\}^3=\sqrt[3]{a}^{\,3}\ ,$$

故に，

$$\sqrt[3]{a^3}=a\ .\qquad \sqrt[3]{a}^{\,3}=a\ .$$

定理　任意の実数 a について，

$$\sqrt[3]{a^3}=a\ ,\qquad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a\ .$$

$\left(\sqrt[3]{A}\right)^3$ を $\sqrt[3]{A}^{\,3}$ のように略します.

例題　次の式を計算して簡単にする：$\sqrt[3]{64}$ ，$\sqrt[3]{-8}$ ，$\sqrt[3]{5}^{\,6}$.

$$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4\ .$$
$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2\ .$$

1.2 節で述べた指数法則 $a^{mn}=(a^m)^n$ （m,n は自然数）を用いる：

$$\sqrt[3]{5}^{\,6}=\sqrt[3]{5}^{\,3\cdot 2}=\left(\sqrt[3]{5}^{\,3}\right)^2=5^2=25\ .$$

終

問題 8.3　以下の式を計算して簡単にしなさい.

(1) $\sqrt[3]{125}$.　　(2) $\sqrt[3]{-27}$.　　(3) $\sqrt[3]{-2}^{\,15}$.

定理 1.6.5 と似たような定理が成り立ちます（証明は略します）.

定理　任意の実数 a,b について，

$$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}\ ,\qquad b\neq 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\ .$$