§8.5　冪関数の逆関数

7.6節で述べたように，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ である f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の逆関数 f^{-1} があります．

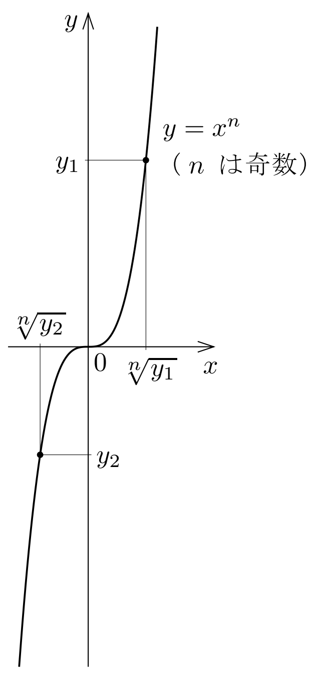
8.3節で述べたように，関数 x^3 には逆関数 $\sqrt[3]{x}$ があります． このように，正の奇数を指数とする冪関数 x^3 , x^5 , x^7 などには逆関数があります．

正の奇数 n に対して，定義域が実数全体である冪関数 x^n を f とおきます： $f(x)=x^n$ ． xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフを見ると分かるように，任意の実数 y に対して $y=f(x)$ となる実数 x が唯一つあるので，関数 f の逆関数 f^{-1} があります． f の値域は実数全体ですから，f の逆関数 f^{-1} の定義域は実数全体です． f^{-1} の値 $f^{-1}(x)$ を $\sqrt[n]{x}$ と書き表します： $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ ． 任意の実数 a について，定理7.6.3より， $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)=a$ ， $f\bigl(f^{-1}(a)\bigr)=a$ ；ここで，

$$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)=\sqrt[n]{f(a)}=\sqrt[n]{a^n}\ ,$$
$$f\bigl(f^{-1}(a)\bigr)=\{f^{-1}(a)\}^n=\sqrt[n]{a}^{\,n}\ ,$$

故に，

$$\sqrt[n]{a^n}=a\ .\qquad \sqrt[n]{a}^{\,n}=a\ .$$



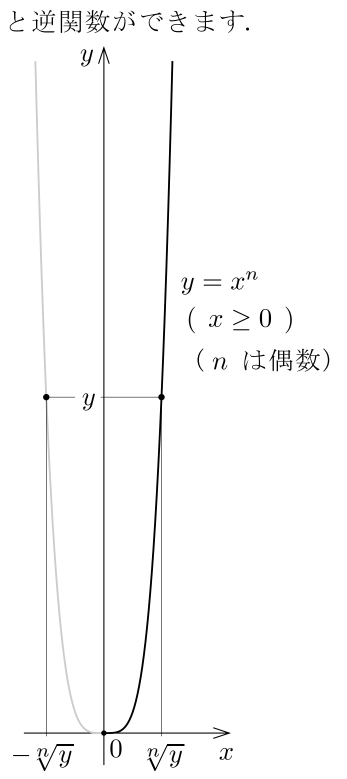
8.1節で述べたように，関数 x^2 の定義域が実数全体であるときその逆関数はありませんが，関数 x^2 の定義域を区間 $[0,\infty)$ に制限すると逆関数ができます． 同様に，正の偶数を指数とする冪関数 x^4 , x^6 , x^8 などは，定義域が実数全体であるときその逆関数はありませんが，定義域を区間 $[0,\infty)$ に制限すると逆関数ができます．

正の偶数 n に対して，定義域が区間 $[0,\infty)$ である関数 x^n を f とおきます： $f(x)=x^n$ （ $x\geq 0$ ）． xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフを見ると分かるように， $y\geq 0$ である実数 y に対して $f(x)=y$ かつ $x\geq 0$ となる実数 x が唯一つあるので，f の逆関数 f^{-1} があります． f の値域は $[0,\infty)$ ですから，f の逆関数 f^{-1} の定義域は $[0,\infty)$ です． f^{-1} の値 $f^{-1}(x)$ を $\sqrt[n]{x}$ と書き表します： $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ （ $x\geq 0$ ）． $a\geq 0$ である任意の実数 a について，定理7.6.3より， $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)=a$ ， $f\bigl(f^{-1}(a)\bigr)=a$ ；ここで

$$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)=f^{-1}(a^n)=\sqrt[n]{a^n}\ ,$$
$$f\bigl(f^{-1}(a)\bigr)=f\bigl(\sqrt[n]{a}\bigr)=\sqrt[n]{a}^{\,n}\ ,$$

故に，

$$\sqrt[n]{a^n}=a\ ,\qquad \sqrt[n]{a}^{\,n}=a\ .$$



定理8.5　正の整数 n が奇数のとき，任意の実数 a について，

$$\sqrt[n]{a^n}=a\ ,\qquad \sqrt[n]{a}^{\,n}=a\ .$$

正の整数 n が偶数のとき， $a\geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt[n]{a^n}=a\ ,\qquad \sqrt[n]{a}^{\,n}=a\ .$$

例題　次の式を計算して簡単にする： $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{5}^{\,8}$.

$$\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2\ .$$

1.2節で述べた指数法則 $a^{mn}=(a^m)^n$ （ m,n は自然数） を用いる：

$$\sqrt[4]{5}^{\,8}=\sqrt[4]{5}^{\,4\cdot 2}=\bigl(\sqrt[4]{5}^{\,4}\bigr)^2=5^2=25\ .$$

終

問題8.5　以下の式を計算して簡単にしなさい．

(1) $\sqrt[4]{81}$.　　(2) $\sqrt[5]{-2}^{\,15}$.　　(3) $\sqrt[6]{64}$.

冪関数 x^1 の逆関数は $\sqrt[1]{x}$ ですから， $\sqrt[1]{x^1}=x$ ； $x^1=x$ ですから，結局 $\sqrt[1]{x}=x$ ． つまり， $\sqrt[1]{\ }$ は実質的に意味がありません． また，定義域が区間 $[0,\infty)$ である2次関数 x^2 の逆関数は $\sqrt{x}$ です（定理8.1）から， $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ ． つまり， $\sqrt[2]{\ }$ は $\sqrt{\ }$ と同じことです．

正の整数 n に対して，記号 $\sqrt[n]{\ }$ を根号といい，実数 a に対して $\sqrt[n]{a}$ を n 乗根 a ということがあります． n が偶数であるときは， $\sqrt[n]{a}$ は $a\geq 0$ のときにのみ意味を持ちます． 定理1.6.5と似たような定理が成り立ちます（証明は略します）．

定理　任意の正の整数 n および任意の実数 a,b について， n が偶数であるとき $a\geq 0$ かつ $b\geq 0$ ならば，

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ ,\qquad b\neq 0\ \text{のとき}\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ .$$

――――― 冪根

n を 2 以上の整数とします． 複素数 a に対して， $x^n=a$ となる複素数 x を a の n 乗根といいます． 2乗根のことを平方根といい，3乗根のことを立方根といいます． 実数の範囲で，n 乗根を考えます．

8.2節で次のことを導きました：

任意の実数 a と x とについて， $x^3=a$ ならば $x=\sqrt[3]{a}$ ．

一般に，3 以上の奇数 n に対して次のことが成り立ちます：

任意の実数 a と x とについて， $x^n=a$ ならば $x=\sqrt[n]{a}$ ．

従って，a の実数の n 乗根つまり $x^n=a$ となる実数は， $\sqrt[n]{a}$ だけです．

実数の2乗根つまり平方根について次のようになりました：実数 a について，

$a\geq 0$ のとき，a の実数の2乗根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ ；

$a<0$ のとき，a の実数の2乗根はない．

一般に，正の偶数 n に対して次のようになります：実数 a について，

$a\geq 0$ のとき，a の実数の n 乗根は $\sqrt[n]{a}$ と $-\sqrt[n]{a}$ ；

$a<0$ のとき，a の実数の n 乗根はない．