

§ 8.8 指数の拡張

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げます。例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考えます。 $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$ ですから、次のような値を計算できます：

$$\begin{aligned}3^{1.41} &= 3^{\frac{141}{100}} = 4.70\dots, \\3^{1.414} &= 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.727\dots, \\3^{1.4142} &= 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.7287\dots, \\3^{1.41421} &= 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878\dots, \\3^{1.414213} &= 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.728801\dots, \\3^{1.4142135} &= 3^{\frac{14142135}{10000000}} = 4.7288041\dots, \\3^{1.41421356} &= 3^{\frac{141421356}{100000000}} = 4.72880437\dots, \\3^{1.414213562} &= 3^{\frac{1414213562}{1000000000}} = 4.728804385\dots, \\&\vdots\end{aligned}$$

このように、指数を $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$ に近づけていくと、3 の冪は $4.7288043878374\dots$ に近づいていきます。このことより、 $3^{\sqrt{2}} = 4.7288043878374\dots$ と考えます⁴⁾。

このようにして、任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができます。そして、前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できます。

定理 (実数指数の指数法則) 任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について、

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$(ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

正の数の冪の値はいつも正です。

定理 任意の正の実数 a 及び任意の実数 p について $a^p > 0$.

⁴⁾ これは大雑把な話です。数学的にはもっと厳密な議論が必要ですが、本書では扱いません。