§8.9　冪関数

定数 p は実数とします．前節で述べたように，任意の正の実数 x に対して x の p 乗 x^p の値が唯一つ定まります．従って，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させると，この対応は関数になります．この関数 x^p を，指数が p である**冪関数**といいます．

例えば，変数 x について $x>0$ のとき，

x の関数 x^{-5} は 指数が -5 である冪関数で，
x の関数 $x^{\frac{16}{3}}$ は 指数が $\dfrac{16}{3}$ である冪関数で，
x の関数 $x^{\sqrt{7}}$ は 指数が $\sqrt{7}$ である冪関数です．

$\boxed{\text{例題}}$　定義域が区間 $[0,\infty)$ である冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ であるとする． 125 における f の値及び $\dfrac{7}{8}$ における f の値を求める．

冪関数 f の指数が $\dfrac{2}{3}$ なので， $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ．

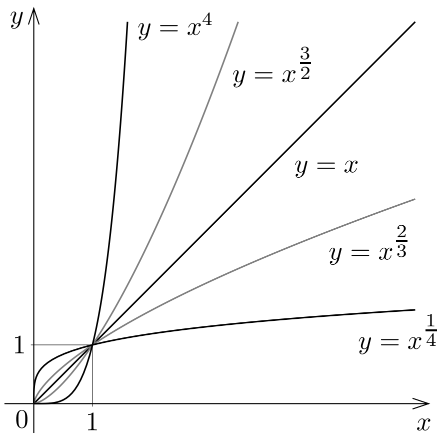
$$f(125)=125^{\frac{2}{3}}=(5^3)^{\frac{2}{3}}=5^2=25\ .$$

$$f\Big(\frac{7}{8}\Big)=\Big(\frac{7}{8}\Big)^{\frac{2}{3}}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{(2^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{2^2}=\frac{7^{\frac{2}{3}}}{4}\ .$$

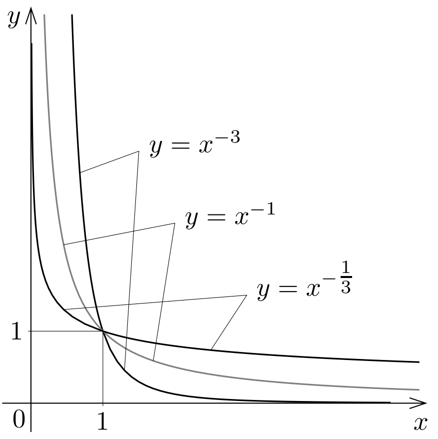
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.9.1}}$　関数 f は $\dfrac{3}{4}$ を指数とする冪関数であり，その定義域は区間 $[0,\infty)$ であるとします． 81 における f の値および $\dfrac{11}{16}$ における f の値 49 における f の値を求めなさい．

定数 p は実数で $p\neq 0$ とします． $p>0$ のときの冪関数 x^p （ $x\geq 0$ ）のグラフと $p<0$ のときの冪関数 x^p （ $x>0$ ）のグラフとは次のようになります．



$p>0$ のときの $y=x^p$ のグラフ



$p<0$ のときの $y=x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理 8.9.1　定数 p は実数で $p\neq 0$ とする．
$p>0$ のとき，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調増加である．
$p<0$ のとき，区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調減少である．

0 以上の実数 x について， $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ ， $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ ．従って，上述の定理 8.9.1 より，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ などは単調増加です．

冪関数の逆関数について次の定理が成り立ちます．

定理 8.9.2　定数 p は実数で $p\neq 0$ とする．
(1) $p>0$ のとき，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は， $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である．
(2) $p<0$ のとき，区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は， $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である．

証明　項 (1) を証明する． $p>0$ とする． $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 f と g とを次のように定める：

$$f(x)=x^p\quad(\ x\geq 0\ )\ ,\qquad g(x)=x^{\frac{1}{p}}\quad(\ x\geq 0\ )$$

f の値域は区間 $[0,\infty)$ であり， g の定義域と一致する．また，区間 $[0,\infty)$ の任意の実数 x について，指数法則より，

$$g\big(f(x)\big)=g(x^p)=(x^p)^{\frac{1}{p}}=x^{p\frac{1}{p}}=x^1=x\ .$$

従って，定理 7.6.4 より，関数 g は関数 f の逆関数である．　（証明終り）

このように，冪関数の逆関数はやはり冪関数です．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\geq -\dfrac{9}{5}$ とする． x に関する方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}}=7$ を解く．

〔解説〕 $x\geq -\dfrac{9}{5}$ つまり $5x+9\geq 0$ である各実数 x について

$$\Big\{(5x+9)^{\frac{3}{4}}\Big\}^{\frac{4}{3}}=(5x+9)^1=5x+9\ .$$

方程式 $(5x+9)^{\frac{3}{4}}=7$ の両辺を $\dfrac{4}{3}$ 乗する：

$$\Big\{(5x+9)^{\frac{3}{4}}\Big\}^{\frac{4}{3}}=7^{\frac{4}{3}}\ ,$$

$$5x+9=7^{\frac{4}{3}}\ ,$$

故に $x=\dfrac{7^{\frac{4}{3}}-9}{5}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.9.2}}$　変数 x について $x\geq\dfrac{3}{4}$ とします． x に関する方程式 $(4x-3)^{\frac{7}{5}}=9$ を解きなさい．