第８章の補遺１　実数の立方根

複素数 a に対して，$x^3 = a$ となる複素数 x を a の 3 乗根または立方根といいます.

実数 a について，$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ なので $\sqrt[3]{a}$ は a の立方根です．a の立方根を総て求めてみます．複素数 x は実数 a の立方根であるとします．$x^3 = a$ なので $x^3 - a = 0$ ．$\sqrt[3]{a}^{\,3} = a$ なので，$x^3 - \sqrt[3]{a}^{\,3} = 0$ ．この等式の左辺を因数分解すると $x^3 - \sqrt[3]{a}^{\,3} = \left(x - \sqrt[3]{a}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a}^{\,2}\right)$ なので，

$$\left(x - \sqrt[3]{a}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a}^{\,2}\right) = 0 \ ,$$

$$x - \sqrt[3]{a} = 0 \ \text{または}\ x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a}^{\,2} = 0 \ .$$

2 次方程式 $x^2 + \sqrt[3]{a}\,x + \sqrt[3]{a}^{\,2} = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{\sqrt[3]{a}^{\,2} - 4\sqrt[3]{a}^{\,2}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{a} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{a}^{\,2}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{a}\sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt[3]{a}\,\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \ . \end{aligned}$$

よって，方程式 $x^3 = a$ を解くと $x = \sqrt[3]{a}$ または $x = \sqrt[3]{a}\,\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ．故に，実数 a の立方根は，$\sqrt[3]{a}$ と $\sqrt[3]{a}\,\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ と $\sqrt[3]{a}\,\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ との 3 つです.