

§9.1 指数関数

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします. 8.8節で述べたように, 任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まります. 従って, 実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると, この対応は関数になります; この関数を**底** (base) が a である**指数関数** (exponential function) といいます. $a = 1$ のときは, 任意の実数 x に対して $a^x = 1^x = 1$ ですから, 変数 x の関数 a^x は定数関数です. 従って, $a = 1$ のときは関数 a^x を指数関数とは考えません.

定義 1 でない正の定数 a に対して, 実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定める対応を, 底が a である指数関数という.

1 でない正の定数 a について, 任意の実数 x に対して指数関数の値 a^x がありますから, 指数関数 a^x は実数全体を定義域にすることができます.

例えば, 実数を表す変数 x について,

$$\begin{aligned} x \text{ の関数 } 3^x & \text{ は底が } 3 \text{ の指数関数で,} \\ x \text{ の関数 } \left(\frac{2}{7}\right)^x & \text{ は底が } \frac{2}{7} \text{ の指数関数で,} \\ x \text{ の関数 } \sqrt{14}^x & \text{ は底が } \sqrt{14} \text{ の指数関数です.} \end{aligned}$$

冪関数と指数関数との違いに注意して下さい. 冪関数では底が変数で指数が定数であり, 指数関数では指数が変数で底が定数です: 定数 p と a ($a > 0, a \neq 1$) とに対して次のようになります:

$$\begin{array}{ccc} & \text{指数が定数} & \text{指数が変数} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{指数が } p \text{ の冪関数は } x^p, & & \text{底が } a \text{ の指数関数は } a^x. \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{底が変数} & \text{底が定数} \end{array}$$

以後, 特に断りがない限り, 指数関数の定義域は実数全体であるとします.

例題 指数関数 f の底は 9 であるとする. 3 における f の値及び -2 における f の値及び $\frac{3}{2}$ における f の値を求める.

指数関数 f の底は 9 なので $f(x) = 9^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 9^3 = 729.$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}.$$

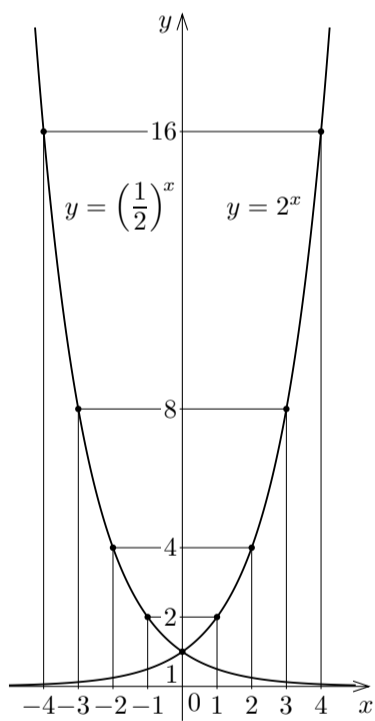
$\frac{3}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27. \quad \text{終}$$

問題 9.1 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとします. 3 における f の値及び -2 における f の値及び $\frac{5}{2}$ における f の値を求めなさい.

例として, 指数関数 2^x と $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ とを考えます. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$ です. xy 座標平面において, $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフとを描いてみます.

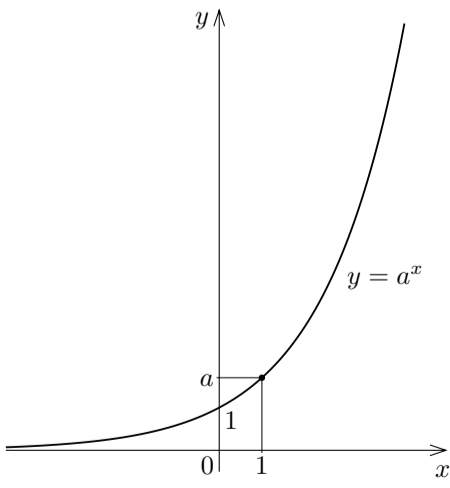
x の値	2^x の値	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の値
-4	$\frac{1}{16} = 0.0625$	16
-3	$\frac{1}{8} = 0.125$	8
-2	$\frac{1}{4} = 0.25$	4
-1	$\frac{1}{2} = 0.5$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2} = 0.5$
2	4	$\frac{1}{4} = 0.25$
3	8	$\frac{1}{8} = 0.125$
4	16	$\frac{1}{16} = 0.0625$



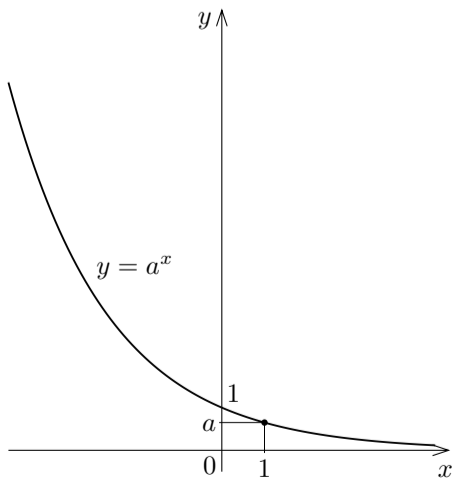
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である. 例えば関数 $y = 2^x$ について, $x = -3, -4, -5,$

$-6, \dots$ としていくと, $y = 2^x = 0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625, 0.0078125, \dots$ のように y の値は 0 に近づいていきます. しかし, 変数 x の値が何であっても $2^x > 0$ ですから, $y = 2^x$ のグラフは x 軸と交わることはありません. ですから x 軸は $y = 2^x$ のグラフの漸近線です.

定数 a は実数で $a > 0, a \neq 1$ とします. $a > 1$ のときと $0 < a < 1$ のときに分けて, xy 座標平面において指数関数 $y = a^x$ のグラフを描きます. $a^0 = 1, a^1 = a$ ですから, $y = a^x$ のグラフは点 $(0, 1)$ と点 $(1, a)$ とが属す. また, x 軸は $y = a^x$ のグラフの漸近線です.



$a > 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します).

定理 9.1 定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 定義域が実数全体である指数関数 a^x の値域は区間 $(0, \infty)$ である. また, 指数関数 a^x は, $a > 1$ のとき単調増加であり, $0 < a < 1$ のとき単調減少である.