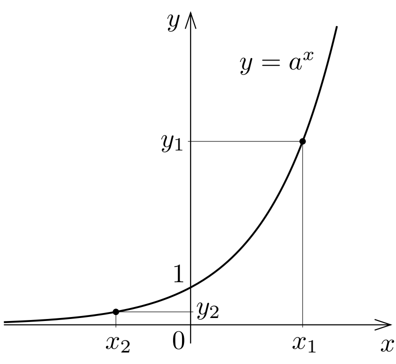
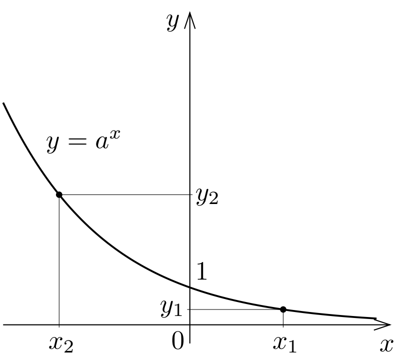
§9.2　対数関数

7.6 節で述べたように，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ である f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の逆関数 f^{-1} があります.

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とします. 定義域が実数全体である指数関数 a^x の値域は正の実数の全体 $(0,\infty)$ です（定理 9.1）. 定義域が実数全体である指数関数 $y=a^x$ のグラフを見ると分かるように，正の各実数 y に対して $y=a^x$ となる実数 x が唯一つあります.



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

よって指数関数 a^x の逆関数があります. a を底とする指数関数の逆関数を，a を底 (base) とする対数関数 (logarithmic function) といいます. 実数全体を定義域とする指数関数の値域は正の実数の全体なので，対数関数の定義域は正の実数の全体です.

定義　1 でない正の定数 a を底とする定義域が実数全体である指数関数 a^x の逆関数を，a を底とする対数関数という. a を底とする対数関数の正の実数 x における値を $\log_a x$ と書き表す. 対数関数 $\log_a x$ の定義域は正の実数の全体である.

対数関数の定義域は本来は正の実数の全体ですが，正の実数の集合（つまり正の実数の全体の部分集合）でもかまいません. 特に断りがないときは対数関数の定義域は正の実数の全体であるとします.

実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とします. a を底とする対数関数の正の実数 r における値 $\log_a r$ を，a を底とする r の**対数** (logarithm) といいます. また，対数を表す式 $\log_a r$ において，r を**真数**といいます. 対数関数 $\log_a x$ の定義域は区間 $(0,\infty)$ に含まれますから，

対数を表す式 $\log_a r$ の真数 r は正の実数に限る

ことに注意して下さい.

定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とします. a を底とする指数関数 a^x を f とおきます： $f(x)=a^x$. f の定義域は実数全体です. a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} ですから， $f^{-1}(x)=\log_a x$. f^{-1} の定義域は正の実数全体です. 任意の実数 p について，定理 7.6.3 より $f^{-1}\bigl(f(p)\bigr)=p$, ここで

$$f^{-1}\bigl(f(p)\bigr)=\log_a\{f(p)\}=\log_a a^p ,$$

よって $\log_a a^p=p$. また，任意の正の実数 r について，定理 7.6.3 より $f\bigl(f^{-1}(r)\bigr)=r$, ここで

$$f\bigl(f^{-1}(r)\bigr)=a^{f^{-1}(a)}=a^{\log_a r} ,$$

よって $a^{\log_a r}=r$. これらのことが指数関数と対数関数との関係の基本になります.

定理 9.2.1　実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする.

任意の実数 p について $\log_a(a^p)=p$.

$r>0$ である任意の実数 r について $a^{\log_a r}=r$.

例えば次のようになります：

$$\log_2 8=\log_2 2^3=3 ;\qquad \log_5 25=\log_5 5^2=2 ;\qquad 3^{\log_3 7}=7 .$$

a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とします. $1=a^0$ なので，定理 9.2.1 より，

$$\log_a 1=\log_a(a^0)=0 .$$

$a=a^1$ なので，定理 9.2.1 より，

$$\log_a a=\log_a(a^1)=1 .$$

対数の式 $\log_a(RS)$ を $\log_a RS$ と，$\log_a(R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくあります. 次のことに注意して下さい：

$\log_a RS=\log_a(RS)$ と $(\log_a R)S$ とは全く別の意味であり，

$\log_a R^p=\log_a(R^p)$ と $(\log_a R)^p$ とは全く別の意味である.

また例えば，$\log_a R+S$ は $(\log_a R)+S$ のことです；$\log_a(R+S)$ との違いに注意して下さい.

例題　次の式を計算する： $\log_3 9+18$, $\log_2(16+48)$.

定理 9.2.1 の公式 $\log_a a^p=p$ （ $a>0$, $a\neq 1$ ）を用いる.

$$\log_3 9+18=\log_3 3^2+18=2+18=20 .$$
$$\log_2(16+48)=\log_2 64=\log_2 2^6=6 .$$

終

問題 9.2.1　以下の式を計算して簡単にしなさい.

(1) $\log_3(27+54)$.　　(2) $\log_2 8+24$.

例題　次の式を計算して簡単にする： $\log_5\frac{1}{25}$, $\log_2\bigl(8\sqrt{2}\bigr)$.

定理 9.2.1 の公式 $\log_a a^p=p$ （ $a>0$, $a\neq 1$ ）及び指数法則を用いる.

$$\log_5\frac{1}{25}=\log_5\frac{1}{5^2}=\log_5 5^{-2}=-2 .$$

$$\log_2\bigl(8\sqrt{2}\bigr)=\log_2\Bigl(2^3 2^{\frac{1}{2}}\Bigr)=\log_2 2^{3+\frac{1}{2}}=\log_2 2^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2} .$$

終

問題 9.2.2　以下の式を計算して簡単にしなさい.

(1) $\log_2\frac{1}{32}$.　　(2) $\log_3\bigl(9\sqrt{3}\bigr)$.

例題　次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

定理 9.2.1 の公式 $a^{\log_a r}=r$ （ $a>0$, $a\neq 1$, $r>0$ ）を用いる. 指数法則 $a^{p+q}=a^p a^q$ より，

$$3^{2+\log_3 7}=3^2 3^{\log_3 7}=9\cdot 7=63 .$$

指数法則 $a^{pq}=(a^p)^q$ より，

$$7^{5\log_7 2}=7^{(\log_7 2)\cdot 5}=\bigl(7^{\log_7 2}\bigr)^5=2^5=32 .$$

終

問題 9.2.3　以下の式を計算して簡単にしなさい.

(1) $2^{3+\log_2 5}$.　　(2) $5^{4\log_5 3}$.

例題　関数 f は 2 を底とする対数関数であるとする. 11 における f の値及び 16 における f の値及び $\frac{1}{8}$ における f の値を求める.

関数 f は 2 を底とする対数関数なので $f(x)=\log_2 x$. 11 における f の値は

$$f(11)=\log_2 11 .$$

16 における f の値は

$$f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4 .$$

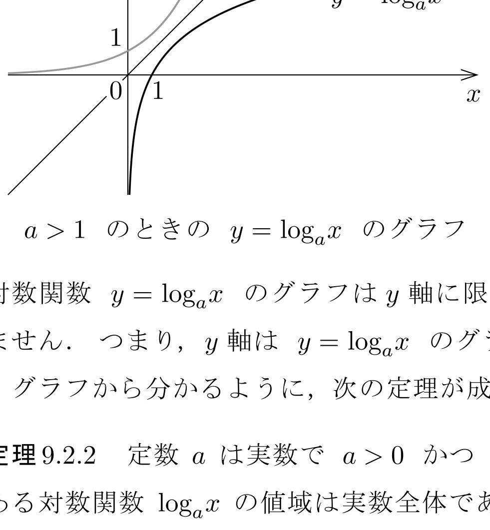
$\frac{1}{8}$ における f の値は

$$f\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2\frac{1}{8}=\log_2\frac{1}{2^3}=\log_2 2^{-3}=-3 .$$

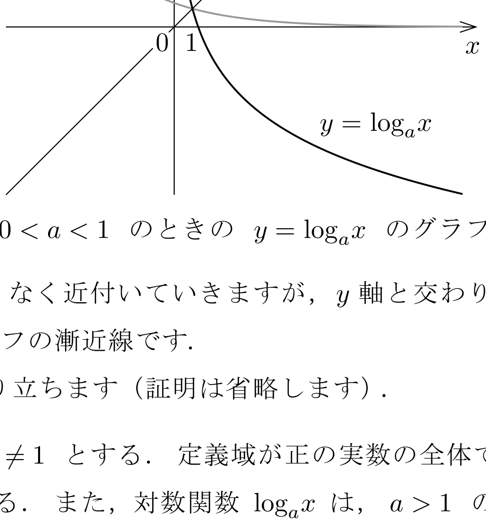
終

問題 9.2.4　対数関数 g の底は 3 であるとします. 23 における g の値及び 81 における g の値及び $\frac{1}{27}$ における g の値を求めなさい.

xy 座標平面において関数 f の逆関数のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です（定理 7.7）. 定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とします. a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数ですから，xy 座標平面において $y=\log_a x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です.



$a>1$ のときの $y=\log_a x$ のグラフ



$0<a<1$ のときの $y=\log_a x$ のグラフ

対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは y 軸に限りなく近付いていきますが，y 軸と交わりません. つまり，y 軸は $y=\log_a x$ のグラフの漸近線です.

グラフから分かるように，次の定理が成り立ちます（証明は省略します）.

定理 9.2.2　定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする. 定義域が正の実数の全体である対数関数 $\log_a x$ の値域は実数全体である. また，対数関数 $\log_a x$ は，$a>1$ のとき単調増加であり， $0<a<1$ のとき単調減少である.