

§9.5 指数・対数に関する不等式

- 定理9.1と定理9.2.2を思い起こして下さい：定数 a について、
- $a > 1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調増加であり、
 - $0 < a < 1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調減少である。

実数 a について $a > 1$ とします。実数 r, s について $r, s > 0$ とします。対数関数 $\log_a x$ は単調増加ですから、

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s .$$

また、指数関数 a^x は単調増加ですから、

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} ;$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$, $a^{\log_a s} = s$ なので、

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } r < s .$$

こうして次のことが導かれます：

$$r < s \iff \log_a r < \log_a s .$$

実数 a について $0 < a < 1$ とします。実数 r, s について $r, s > 0$ とします。対数関数 $\log_a x$ は単調減少ですから、

$$r < s \text{ ならば } \log_a r > \log_a s .$$

また、指数関数 a^x は単調減少ですから、

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} ;$$

定理9.2.1より $a^{\log_a r} = r$, $a^{\log_a s} = s$ なので、

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } r < s .$$

こうして次のことが導かれました：

$$r < s \iff \log_a r > \log_a s .$$

このようにして次の定理が導かれます。

定理9.5 実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする。

(1) $a > 1$ のとき、正の実数 r と s について、

$$r < s \iff \log_a r < \log_a s ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \leq \log_a s ;$$

(2) $0 < a < 1$ のとき、正の実数 r と s について、

$$r < s \iff \log_a r > \log_a s ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \geq \log_a s .$$

例解 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解きます。定理9.2.1より各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x-5$ なので、3を底とする対数を考えます。 $3^{x-5} > 0$ なので、定理9.5より、

$$\begin{aligned} 3^{x-5} < 7 &\iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7 \iff x-5 < \log_3 7 \\ &\iff x < 5 + \log_3 7 . \end{aligned}$$

不等式 $3^{x-5} < 7$ を解くと $x < 5 + \log_3 7$. 終

例題 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く。

【解説】 各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので、7を底とする対数を考える。 $7^{2x-5} > 0$ なので、不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より、

$$\begin{aligned} \log_7 7^{2x-5} &\leq \log_7 63 \\ 2x-5 &\leq \log_7 63 , \\ 2x &\leq 5 + \log_7 63 , \\ x &\leq \frac{5 + \log_7 63}{2} , \end{aligned}$$

更にこの右辺は

$$\frac{5 + \log_7 63}{2} = \frac{5 + \log_7 (7 \cdot 3^2)}{2} = \frac{5 + 1 + 2\log_7 3}{2} = 3 + \log_7 3 .$$

与えられた不等式を解くと $x \leq 3 + \log_7 3$. 終

問題9.5.1 変数 x に関する不等式 $5^{2x-4} < 45$ を解きなさい。

不等式の中に記号 x を含む式 $f(x)$ を真数とする対数の式 $\log_a f(x)$ が現れるとき、次のことに注意して下さい：

対数の式 $\log_a f(x)$ の真数 $f(x)$ は正である；

従って、その不等式が成り立つためには $f(x) > 0$ でなければなりません。このことを真数条件といいます。

例解 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6) < 2$ を解きます。まず、対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6 > 0$, よって $x > \frac{6}{5}$. 定理9.2.1より $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$ なので、

$$\log_3(5x-6) < 2 \iff \log_3(5x-6) < \log_3 9 ,$$

定理9.5より、

$$\log_3(5x-6) < \log_3 9 \iff 5x-6 < 9 \iff 5x < 15 \iff x < 3 .$$

従って、不等式 $\log_3(5x-6) < 2$ を解くと、 $x > \frac{6}{5}$ かつ $x < 3$ なので、 $\frac{6}{5} < x < 3$. 終

例題 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く。

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える。

【方針】 右辺を5を底とする対数の式にする。

【解説】 対数の式の真数は正なので、 $3x+7 > 0$, よって $x > -\frac{7}{3}$. 不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ の右辺は $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$ なので、

$$\begin{aligned} \log_5(3x+7) &> \log_5 25 , \\ 3x+7 &> 25 , \\ x &> 6 . \end{aligned}$$

与えられた不等式を解くと、 $x > -\frac{7}{3}$ かつ $x > 6$ ⁸⁾ なので、 $x > 6$. 終

問題9.5.2 変数 k に関する不等式 $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$ を解きなさい。

例題 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5) - 1 \leq 0$ を解く。

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える。

【方針】 両辺が9を底とする一つの対数の式になるように変形する。

【解説】 対数の式の真数は正なので、 $2a-5 > 0$, よって $a > \frac{5}{2}$. 不等式 $2\log_9(2a-5) - 1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} .$$

この不等式の右辺は $\frac{1}{2} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9(3^2)^{\frac{1}{2}} = \log_9 3$ なので、

$$\begin{aligned} \log_9(2a-5) &\leq \log_9 3 , \\ 2a-5 &\leq 3 , \\ a &\leq 4 . \end{aligned}$$

与えられた不等式を解くと、 $a > \frac{5}{2}$ かつ $a \leq 4$ なので、 $\frac{5}{2} < a \leq 4$. 終

問題9.5.3 変数 x に関する不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ を解きなさい。

実数 a について $0 < a < 1$ のとき、正の実数 r と s について、

$$\log_a r < \log_a s \iff r > s .$$

ですから、対数の式の底 a が1より小さいときは、両辺から対数記号 \log_a を外すとき不等号の向きが逆になります。

例題 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く。

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える。

【方針】 右辺を $\frac{1}{2}$ を底とする対数の式にする。

【解説】 対数の式の真数は正なので、 $2y-1 > 0$, よって $y > \frac{1}{2}$. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ の右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$ なので、

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} .$$

対数の式の底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいので、両辺から対数記号 $\log_{\frac{1}{2}}$ を外すとき不等号の向きが逆になる：

$$\begin{aligned} 2y-1 &< \frac{1}{4} , \\ y &< \frac{5}{8} . \end{aligned}$$

与えられた不等式を解くと、 $y > \frac{1}{2}$ かつ $y < \frac{5}{8}$ なので、 $\frac{1}{2} < y < \frac{5}{8}$. 終

問題9.5.4 変数 z に関する不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5) + 2 \geq 0$ を解きなさい。

例題 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1) + \log_3(x-7) \leq 2$ を解く。

【注意】 まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える。

【方針】 両辺を3を底とする一つの対数の式にする。

【解答】 対数の式の真数は正なので、 $x+1 > 0$ かつ $x-7 > 0$, つまり $x > 7$. 不等式 $\log_3(x+1) + \log_3(x-7) \leq 2$ について、左辺は

$$\log_3(x+1) + \log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} ,$$

右辺は $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$ なので、

$$\begin{aligned} \log_3\{(x+1)(x-7)\} &\leq \log_3 9 , \\ (x+1)(x-7) &\leq 9 , \\ x^2 - 6x - 16 &\leq 0 , \\ (x+2)(x-8) &\leq 0 , \\ -2 &\leq x \leq 8 . \end{aligned}$$

与えられた不等式を解くと、 $x > 7$ かつ $-2 \leq x \leq 8$ なので、 $7 < x \leq 8$. 終

問題9.5.5 変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1) + \log_2(x-3) \leq 5$ を解きなさい。

⁸⁾ この例題では、不等式 $x > 6$ を導く途中で $3x+7 > 25$ となっているので、真数条件 $3x+7 > 0$ は必然的に成り立ちます；ですから真数条件を別途考える必要はありません。