§9.7　対数関数との合成関数のグラフ

xy 座標平面において関数のグラフを考えます．定数 a は実数で $a>0$ ，$a \neq 1$ とします．関数 f について，

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

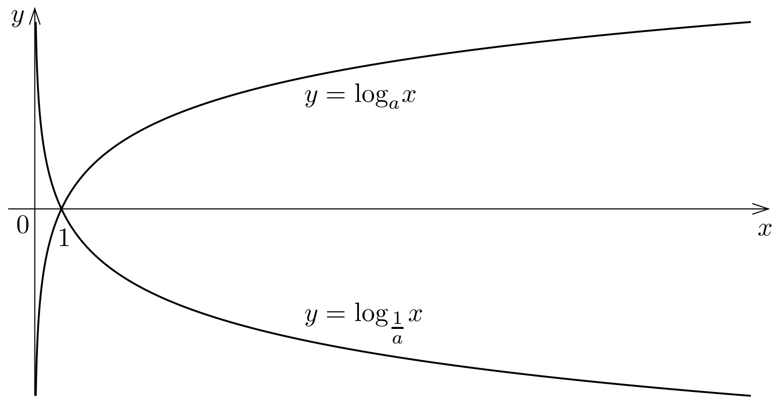
ここで $f(x)=\log_a x$ とおきます． $-f(x)=-\log_a x$ なので，

$y=-\log_a x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である．

対数の底の変換公式より $\log_{\frac{1}{a}} x=\dfrac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}}=\dfrac{\log_a x}{-1}=-\log_a x$ なので，次のことがいえる：

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である．

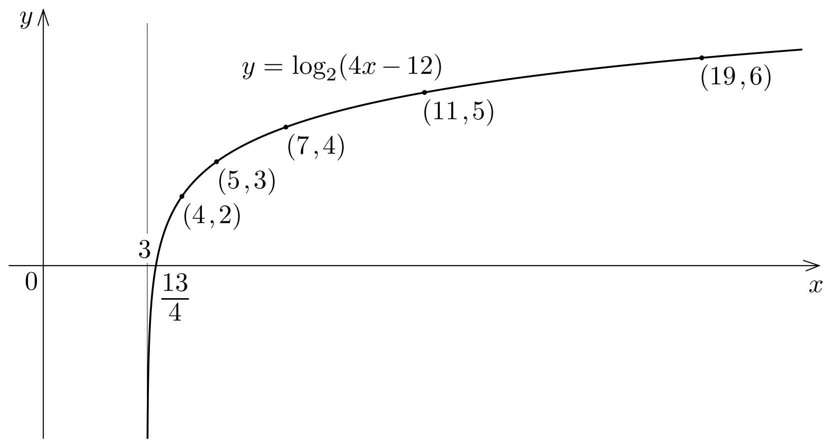
例えば $a>1$ のとき次のようになります．



対数関数との合成関数のグラフを考えます．

$\boxed{\text{例解}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描きます；またその漸近線を表す方程式を求めます．変数 t を $t=4x-12$ とおきます． $x=\dfrac{t+12}{4}=\dfrac{t}{4}+3$ ． $y=\log_2(4x-12)$ つまり $y=\log_2 t$ より $t=2^y$ ． y の値に対する $t=2^y$ の値と $x=\dfrac{t}{4}+3$ の値との対応を調べると右の表のようになります．定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフは次のようになります．

y	$t=2^y$	$x=\dfrac{t}{4}+3$
0	1	$\dfrac{13}{4}$
1	2	$\dfrac{7}{2}$
2	4	4
3	8	5
4	16	7
5	32	11
6	64	19

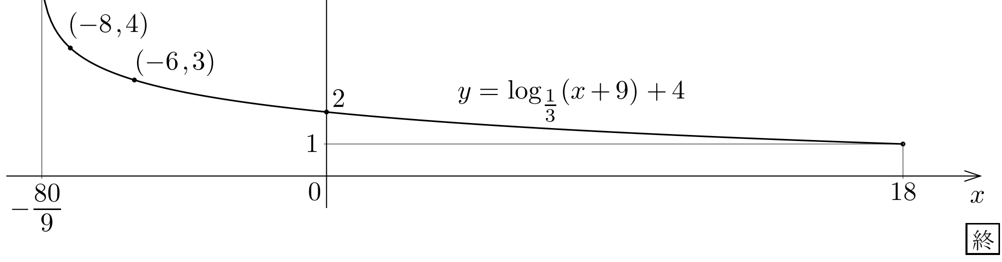


定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフの漸近線は方程式 $x=3$ で表される直線です． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 9.7.1}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフを描きなさい；またその漸近線を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例解}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9},18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描きます．変数 u を $u=x+9$ とおきます． $x=u-9$ ．更に変数 v を $v=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)$ とおきます． $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4=v+4$ ． $v=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)=\log_{\frac{1}{3}} u$ なので $u=\left(\dfrac{1}{3}\right)^v=\dfrac{1}{3^v}=3^{-v}$ ． $-\dfrac{80}{9} \leq x \leq 18$ なので $-\dfrac{80}{9} \leq u-9 \leq 18$ ，よって $\dfrac{1}{9} \leq u \leq 27$ ．この範囲で，v の値に対する $u=3^{-v}$ の値と $x=u-9$ の値と $y=v+4$ の値との対応を調べると右の表のようになります．定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9},18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+2$ のグラフは次のようになります．

v	$u=3^{-v}$	$x=u-9$	$y=v+4$
2	$\dfrac{1}{9}$	$-\dfrac{80}{9}$	6
1	$\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{26}{3}$	5
0	1	-8	4
-1	3	-6	3
-2	9	0	2
-3	27	18	1



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 9.7.2}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\dfrac{33}{8},20\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描きなさい．