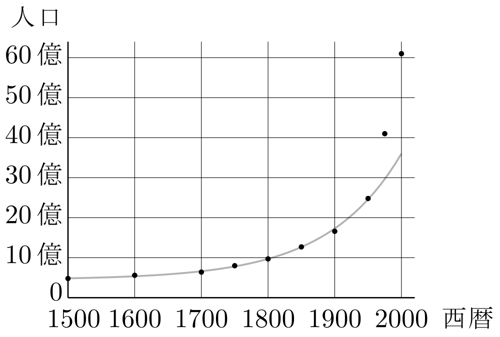
第９章の補遺１　指数関数が現れる事象

生物が子孫を増やしていく状況について，きわめて単純な状況を考えます．ある動物は，いつも雄と雌とが半分ずついて，総ての雄と雌とが一匹ずつ１回だけつがいになって４匹の子供を産むものとします．最初に雄雌が 100 匹ずつ併せて 200 匹の個体がいて，100 組のつがいができたとします．これを第１世代とします．一つがいが４匹ずつ子供を産むので，次のようになります：

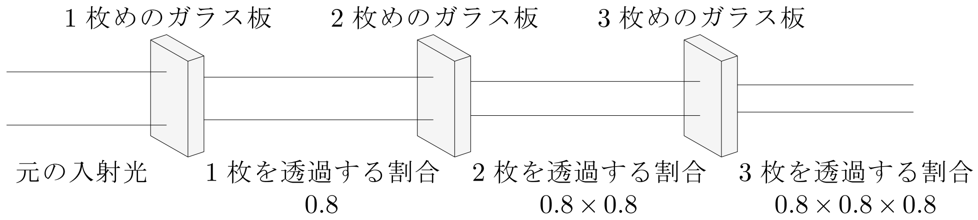
第１世代	の個体数は	200	でつがいの数は	100	;
第２世代（第１世代の子供達）	の個体数は	400	でつがいの数は	200	;
第３世代（第２世代の子供達）	の個体数は	800	でつがいの数は	400	;
第４世代（第３世代の子供達）	の個体数は	1600	でつがいの数は	800	;
第５世代（第４世代の子供達）	の個体数は	3200	でつがいの数は	1600	;
		⋮			.

このように，自然数 x に対して，第 x 世代の個体数は 100×2^x になります．これは極めて単純な例ですが，成長するための条件が整っているとき，世代あるいは時間に対する生物の個体数の増加は理論的には指数関数の定数倍の変化に近くなります．

個体数の増加の例として，西暦 1500 年から 2000 年までの間の世界の人口の推定値をプロットすると右図のようになります．この図より，世界の人口は，20 世紀前半までは指数関数のグラフの形[1]（右図の網掛けの曲線）にほぼ沿って増加してきたのに，20 世紀後半に急増したことが分かります．



透明なガラスでも何枚も重ねるとだんだんと不透明になってきます．ガラスに差し込んだ光は幾らかの割合でガラスに吸収されるので，透過する（通り抜ける）量は差し込んだ量より減ります．例えばある一様なガラス板に垂直に光が差し込んだとき差し込んだ量に対して透過する量の割合は 0.8 であるとします．このガラス板を２枚並べます．垂直に差し込んだ光について，１枚めを透過する量の割合は 0.8 で，その内２枚めを透過する量の割合も 0.8 ですから，２枚のガラス板を透過する量の割合は $0.8 \times 0.8 = 0.8^2$ です．更にこのガラス板を３枚並べると，１枚めと２枚めとを透過する量の割合が 0.8^2 で，その内３枚めを透過する量の割合も 0.8 なので，３枚のガラス板を透過する量の割合は $0.8^2 \times 0.8 = 0.8^3$ です．



一般的に，自然数 x に対して，このガラス板を x 枚重ねたとき透過する光の量の割合は 0.8^x になります．ガラス板の厚さ 1cm とすると，光の吸収に関して，ガラス板を x 枚重ねたものは厚さ $x$cm のガラス板と考えられます；これを透過する光の量の割合が 0.8^x になります．このように，ガラス板に差し込んだ光が透過する量の割合はガラスの厚さに対する指数関数で表せます．

音波の音程と周波数との関係を考えます．音程が１オクターブ高くなると周波数は２倍になります．ですから，

音程が２オクターブ高くなると周波数は２倍の２倍つまり 2^2 倍に，
音程が３オクターブ高くなると周波数は２倍の２倍の２倍つまり 2^3 倍に，
音程が４オクターブ高くなると周波数は２倍の２倍の２倍の２倍つまり 2^4 倍に，

なります．一般的にいうと，自然数 x に対して，音程が x オクターブ高くなると周波数は 2^x 倍になります．このように，音の周波数の比は音階の指数関数になります．

借金を返さないでいると通常は利子がついて借金の金額が増えていきます．仮に，月 9% の複利で 10 万円の借金をするとどうなるでしょうか．月 9% の複利ということは，借金の金額に対して毎月 0.09 倍の利子が付くということですから，１ヶ月後には借金の金額が 1.09 倍になるということです．２ヶ月後には借金の金額は 1.09 倍の 1.09 倍つまり $(1.09)^2$ 倍になります．３ヶ月後には借金の金額は $(1.09)^2$ 倍の 1.09 倍つまり $(1.09)^3$ 倍になります．この調子で，自然数 x に対して，x ヶ月後には借金の金額は $(1.09)^x$ 倍になります．従って，10 万円借りて全く返さずにいると，x ヶ月後の借金の金額は $10(1.09)^x$ 万円 になります．例えば，２年後の借金の金額は $10(1.09)^{24}$ 万円 $\fallingdotseq 79.11$ 万円 で，３年後の借金の金額は $10(1.09)^{36}$ 万円 $\fallingdotseq 222.51$ 万円 です．

---

[1] 正確には指数関数に定数を掛けて加えて補正した関数 $ab^x + c$ （a, b, c は定数）のグラフです．