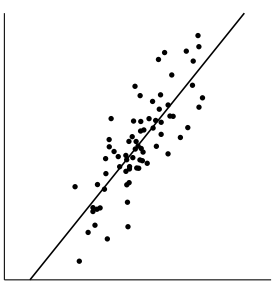
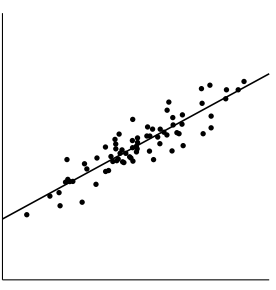
§1.5　回帰直線を表す方程式

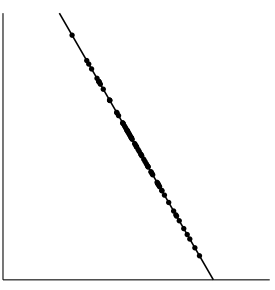
変量 X の値と変量 Y の値との順序対を要素とする 2 次元のデータについて，相関係数の絶対値が 1 に近いとき，散布図の点は一つ直線つまり 1 次関数のグラフの近くに分布します．つまり，データの各要素の Y の値が X の値の 1 次関数の値に近いことになります．その 1 次関数のグラフである直線を Y の X への回帰直線といいます．2 次元のデータの散布図に対して回帰直線は例えば次の図の直線のようになります．



相関係数 0.8



相関係数 0.9



相関係数 -1

回帰直線を表す方程式を求める公式は次のようになります．

公式　変量 X の値と変量 Y の値との順序対を要素とする 2 次元のデータについて，X の平均を $\overline{x}$ とおき，Y の平均を $\overline{y}$ とおき，X の分散を v_X とおき，X と Y との共分散を c_{XY} とおくとき，Y の X への回帰直線は xy 座標平面において方程式 $y=\dfrac{c_{XY}}{v_X}(x-\overline{x})+\overline{y}$ で表される．

この公式を導きます．正の自然数 n に対して，変量 X の値と変量 Y の値との n 個の順序対

$$(x_1,y_1)\,,\ (x_2,y_2)\,,\ (x_3,y_3)\,,\ (x_4,y_4)\,,\ \dots\,,\ (x_n,y_n)$$

を要素とする 2 次元のデータがあるとします．各要素の Y の値が X の値の 1 次関数の値に近いとします．定数 a,b に対して，変数 x の 1 次関数 $ax+b$ を考えます．$k=1,2,3,\dots,n$ に対して，Y の値 y_k が X の値 x_k の 1 次関数の値 ax_k+b に近くなるようにします．そこで，ax_k+b と y_k との差の 2 乗の総和 $\sum\limits_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)^2$ の値が最小になるように a 及び b の値を定めます．X の平均 $\overline{x}$ 及び Y の平均 $\overline{y}$ は，

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\ ,\qquad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\ ,$$

これより，

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=n\overline{x}\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n}y_k=n\overline{y}\ .$$

X の分散 v_X 及び Y の分散 v_Y は，定理 1.3 より，

$$v_X=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-\overline{x}^2\ ,\quad v_Y=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2-\overline{y}^2\ ,$$

これより

$$\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2=n(v_X+\overline{x}^2)\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n}{y_k}^2=n(v_Y+\overline{y}^2)\ .$$

X と Y との共分散 c_{XY} は，定理 1.4.1 より，

$$c_{XY}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_ky_k)-\overline{x}\,\overline{y}\ ,$$

これより，

$$\sum_{k=1}^{n}(x_ky_k)=n(c_{XY}+\overline{x}\,\overline{y})\ .$$

これらの等式より，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)^2\\
&=\sum_{k=1}^{n}(a^2{x_k}^2+b^2+{y_k}^2+2abx_k-2ax_ky_k-2by_k)\\
&=a^2\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2+\sum_{k=1}^{n}b^2+\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2+2ab\sum_{k=1}^{n}x_k-2a\sum_{k=1}^{n}(x_ky_k)-2b\sum_{k=1}^{n}y_k\\
&=a^2n(v_X+\overline{x}^2)+nb^2+n(v_Y+\overline{y}^2)+2abn\overline{x}-2an(c_{XY}+\overline{x}\,\overline{y})-2bn\overline{y}\ .
\end{aligned}$$

まず b について平方完成します：

$$\begin{aligned}
&a^2n(v_X+\overline{x}^2)+nb^2+n(v_Y+\overline{y}^2)+2abn\overline{x}-2an(c_{XY}+\overline{x}\,\overline{y})-2bn\overline{y}\\
&=nb^2+2nb(a\overline{x}-\overline{y})+na^2(v_X+\overline{x}^2)-2na(c_{XY}+\overline{x}\,\overline{y})+n(v_Y+\overline{y}^2)\\
&=n\{b^2+2b(a\overline{x}-\overline{y})+(a\overline{x}-\overline{y})^2-(a\overline{x}-\overline{y})^2\}+\\
&\qquad na^2(v_X+\overline{x}^2)-2na(c_{XY}+\overline{x}\,\overline{y})+n(v_Y+\overline{y}^2)\\
&=n(b+a\overline{x}-\overline{y})^2-n(a\overline{x}-\overline{y})^2+na^2(v_X+\overline{x}^2)-2na(c_{XY}+\overline{x}\,\overline{y})+n(v_Y+\overline{y}^2)\\
&=n(b+a\overline{x}-\overline{y})^2-n(a^2\overline{x}^2-2a\overline{x}\,\overline{y}+\overline{y}^2)\\
&\qquad+na^2(v_X+\overline{x}^2)-2na(c_{XY}+\overline{x}\,\overline{y})+n(v_Y+\overline{y}^2)\\
&=n(b+a\overline{x}-\overline{y})^2+na^2v_X-2nac_{XY}+nv_Y\ .
\end{aligned}$$

$na^2v_X-2nac_{XY}$ の部分を a について平方完成します：

$$\begin{aligned}
&n(b+a\overline{x}-\overline{y})^2+na^2v_X-2nac_{XY}+nv_Y\\
&=n(b+a\overline{x}-\overline{y})^2+nv_X\left\{a^2-2a\frac{c_{XY}}{v_X}+\left(\frac{c_{XY}}{v_X}\right)^2-\frac{{c_{XY}}^2}{{v_X}^2}\right\}+nv_Y\\
&=n(b+a\overline{x}-\overline{y})^2+nv_X\left(a-\frac{c_{XY}}{v_X}\right)^2-\frac{n{c_{XY}}^2}{v_X}+nv_Y\ .
\end{aligned}$$

これらの等式より，

$$\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)^2=n(b+a\overline{x}-\overline{y})^2+nv_X\left(a-\frac{c_{XY}}{v_X}\right)^2-\frac{n{c_{XY}}^2}{v_X}+nv_Y\ .$$

この式の値が最小になるのは，$b+a\overline{x}-\overline{y}=0$ かつ $a-\dfrac{c_{XY}}{v_X}=0$ のとき，つまり $a=\dfrac{c_{XY}}{v_X}$ かつ $b=\overline{y}-a\overline{x}$ のときです；このとき，

$$ax+b=ax+\overline{y}-a\overline{x}=a(x-\overline{x})+\overline{y}=\frac{c_{XY}}{v_X}(x-\overline{x})+\overline{y}\ .$$

Y の X への回帰直線は，xy 座標平面において方程式 $y=\dfrac{c_{XY}}{v_X}(x-\overline{x})+\overline{y}$ で表されます．

例題 1.5　前節の例題 1.4 のように，4 人の学生 A 君, B 君, C 君, D 君のある科目の中間試験の点数 X と期末試験の点数 Y とについて以下のようになった：

学生	A	B	C	D
中間試験の点数 X	75	67	81	73
期末試験の点数 Y	67	71	83	71

xy 座標平面において，Y の X への回帰直線を表す方程式を求める．

X の平均は $\overline{x}=74$ であり，X の分散は $v_X=25$ であり，Y の平均は $\overline{y}=73$ であり，X と Y との共分散は $c_{XY}=20$ である．Y の X への回帰直線を表す方程式は，$y=\dfrac{c_{XY}}{v_X}(x-\overline{x})+\overline{y}$ なので，$y=\dfrac{20}{25}(x-74)+73$，整理すると $y=\dfrac{4x+69}{5}$．　終

問題 1.5　4 人の学生 A 君, B 君, C 君, D 君の身長（単位は cm）X と体重（単位は kg）Y とについて調べると次のようになりました．

学生	A	B	C	D
身長（単位は cm）X	158	162	174	162
体重（単位は kg）Y	61	53	71	55

xy 座標平面において，Y の X への回帰直線を表す方程式を求めなさい．