§2.0　定積分の定義と意味

実数 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表します：

$$\max\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}\ .$$

実数 a,b について $a\leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとします．

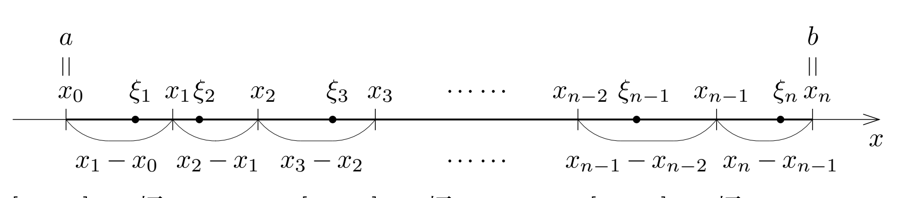
正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=b$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ をとり [1]，区間 $[a,b]$ を n 個の小区間 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$，…，$[x_{n-1},x_n]$ に分割します．更に，

$$x_0\leq\xi_1\leq x_1\ ,\quad x_1\leq\xi_2\leq x_2\ ,\quad x_2\leq\xi_3\leq x_3\ ,\quad\cdots,\quad x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n$$

となる実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとります [2]．ξ_k（$k=1,2,3,\ldots,n$）は小区間 $[x_{k-1},x_k]$ から選ばれた実数です．



区間 $[x_0,x_1]$ の幅 x_1-x_0，$[x_1,x_2]$ の幅 x_2-x_1，$[x_2,x_3]$ の幅 x_3-x_1，…，$[x_{n-1},x_n]$ の幅 x_n-x_{n-1}，の中で最も大きいものを δ_n とおきます：

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}\ .$$

また，各区間 $[x_{k-1},x_k]$（$k=1,2,3,\ldots,n$）の幅 x_k-x_{k-1} と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ の総和を S_n とおきます：

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\\&=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\ .\end{aligned}$$

この S_n を f の**リーマン和** [3] といいます．リーマン和 S_n は正の自然数を表す変数 n の関数です．実数 $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をどう定めるかによって様々なリーマン和ができます．

$n\to\infty$ のとき小区間 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとします；つまり $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とします [4]．$n\to\infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して，極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まる [5] とき，極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ を a から b までの f の**定積分** (definite integral) といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表します．

つまり，大雑把にいうと，関数 f の定積分とは f のリーマン和の極限値です．

改めて定積分の定義を述べます．この定義は覚えてほしいと思います．

> **定義**　実数 a と b とについて $a\leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，
>
> $$a=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=b$$
>
> となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，
>
> $$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}\ ,$$
> $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
>
> とおく．S_n の値を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n\to\infty$ のとき収束して，極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が関数 f 及び実数 a,b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f の a から b までの定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を次のように定義する：
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n\ .$$
>
> 関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：
>
> $$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

実数 a と b とに対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき，a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを f を a から b まで（定）積分するといいます．また，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ において，a を定積分の下端といい，b を定積分の上端といい，区間 $[a,b]$ を積分区間といいます；更に，f を被積分関数といい，x を積分変数といいます．

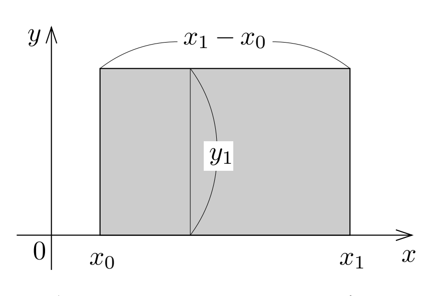
定積分はリーマン和の極限値ですが，リーマン和の極限値を計算するのは大変です．そのため，定積分を計算するときは大抵は次の微分積分の基本定理を用います．

定理（微分積分の基本定理）　関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．a,b が属するある区間において，関数 F が微分可能で $F'(x)=f(x)$ ならば，

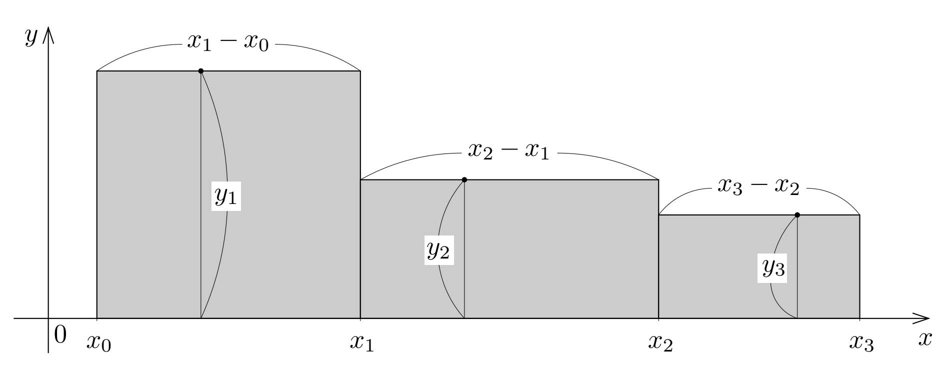
$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\ .$$

定積分は掛け算の拡張です．

$\boxed{\text{例解}}$　xy 座標平面においての底辺が x 軸に含まれる長方形を考えます．例えば右図のように，長方形の点の x 座標の範囲が x_0 以上 x_1 以下で高さが y_1 であるとき，長方形の面積は，横幅 x_1-x_0 と高さ y_1 との積 $y_1(x_1-x_0)$ です．



長方形では“高さ”が一定ですが，“高さ”が途中で切り替わる図形を考えます．



例えば上図のように，

x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で長方形の高さが y_1 であり，

x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で長方形の高さが y_2 であり，

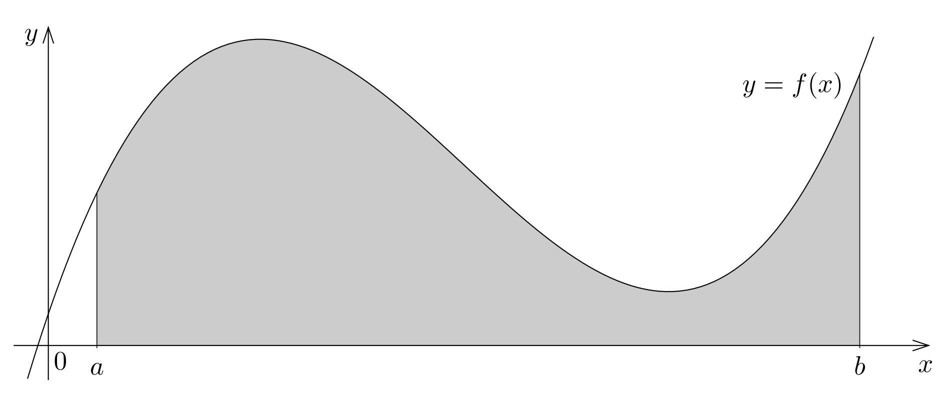
x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で長方形の高さが y_3 である

とき，3 個の網掛けの長方形を併せた図形の面積は

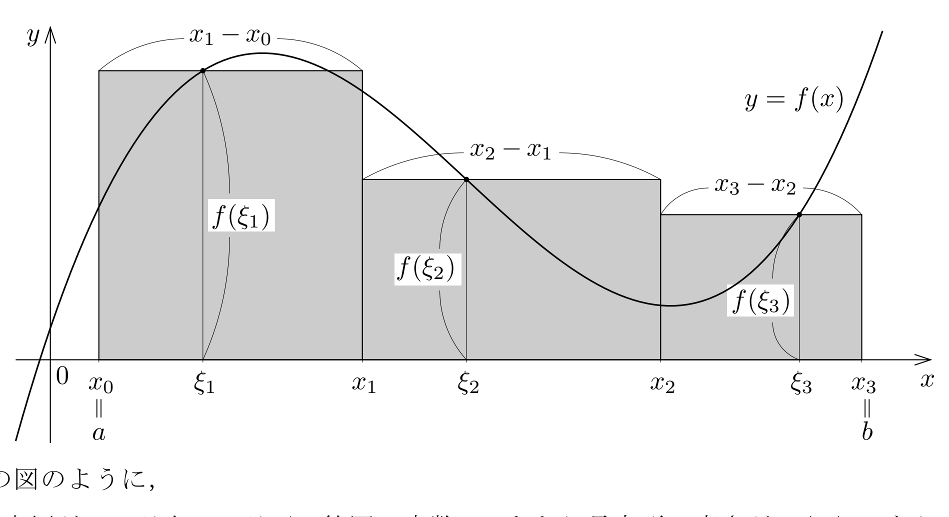
$$y_1(x_1-x_0)+y_2(x_2-x_1)+y_3(x_3-x_2)=\sum_{k=1}^{3}\{y_k(x_k-x_{k-1})\}$$

です．

x 軸からの“高さ”が x 座標の関数として変化する図形を考えます．実数 a,b について $a\leq b$ で，関数 f について $a\leq x\leq b$ である各実数 x について $f(x)\geq 0$ とします．関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x=a$ と直線 $x=b$ とで囲まれる図形の面積を考えます．



$a=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3=b$ である実数 x_0,x_1,x_2,x_3 及び ξ_1,ξ_2,ξ_3 をとり，上の図の網掛の部分の面積を，次の図のような 3 個の網掛の長方形を併せた図形の面積で近似します．



上の図のように，

x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で実数 ξ_1 をとり長方形の高さが $f(\xi_1)$ であり，

x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で実数 ξ_2 をとり長方形の高さが $f(\xi_2)$ であり，

x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で実数 ξ_3 をとり長方形の高さが $f(\xi_3)$ である

とします．網掛けの 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)=\sum_{k=1}^{3}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$

です．この式（の値）を関数 f のリーマン和といいます．

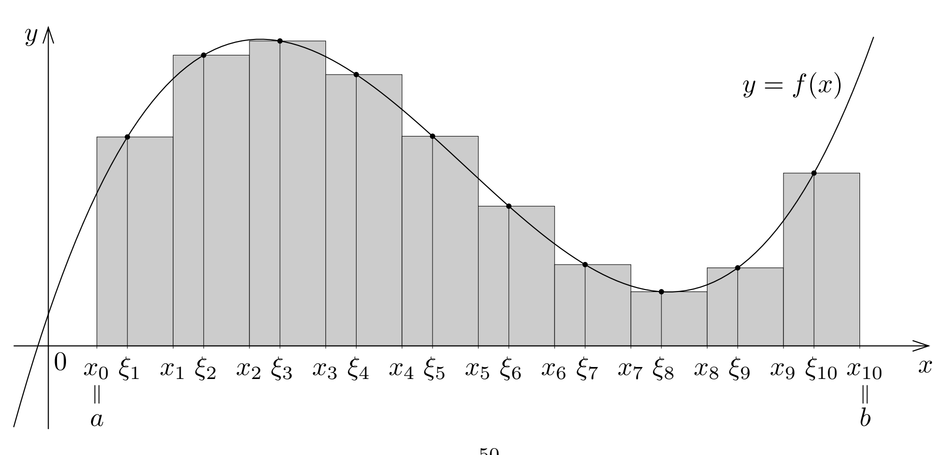
実数 a,b について $a\leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含み，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\geq 0$ とします．正の各自然数 n に対して，

$$a=x_0\leq\xi_1\leq x_1\leq\xi_2\leq x_2\leq\xi_3\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n=b$$

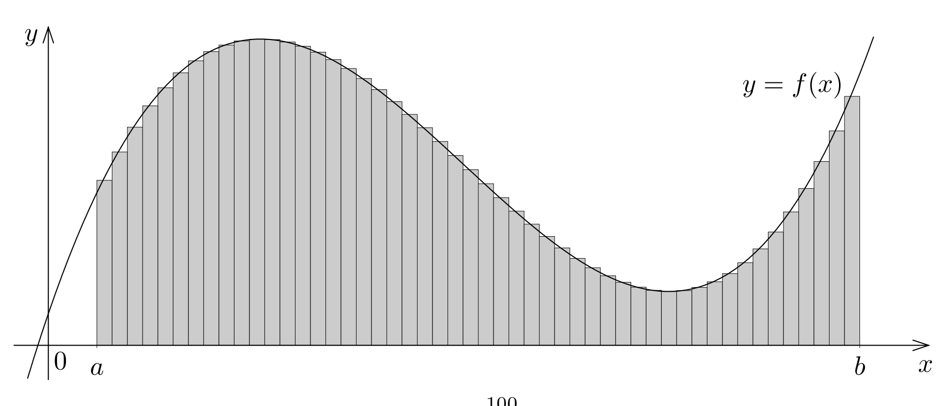
である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとり，n の関数 S_n を次のように定めます：

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\\&=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\ .\end{aligned}$$

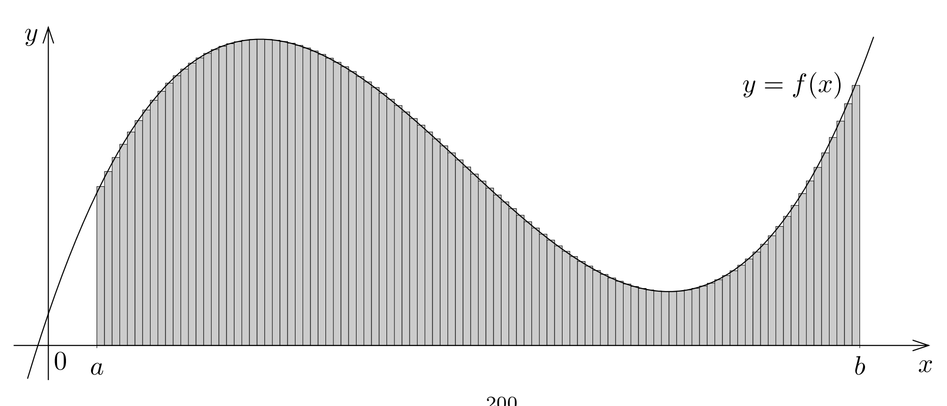
この S_n を表す式（の値）を関数 f のリーマン和といいます．$n=10$ のときの f のリーマン和 $S_{10}=\sum_{k=1}^{10}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 10 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．



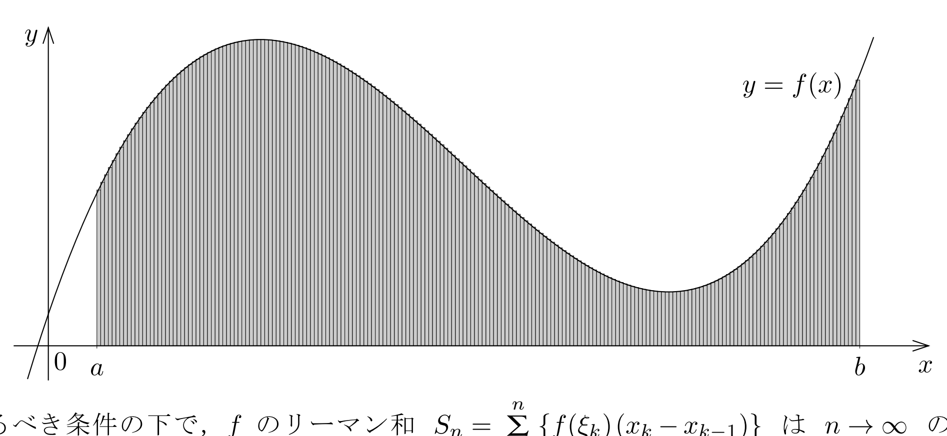
$n=50$ のときの f のリーマン和 $S_{50}=\sum_{k=1}^{50}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 50 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．



$n=100$ のときの f のリーマン和 $S_{100}=\sum_{k=1}^{100}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 100 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．

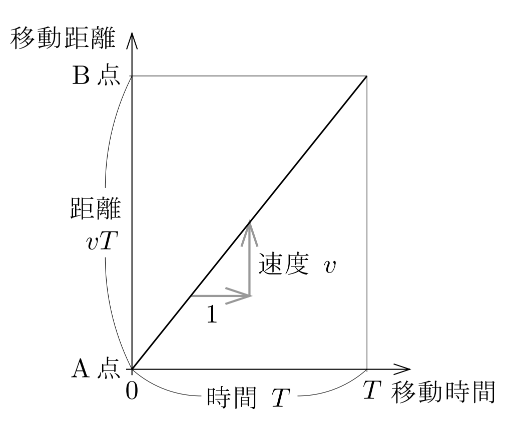


$n=200$ のときの f のリーマン和 $S_{200}=\sum_{k=1}^{200}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は次の図のような 200 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．

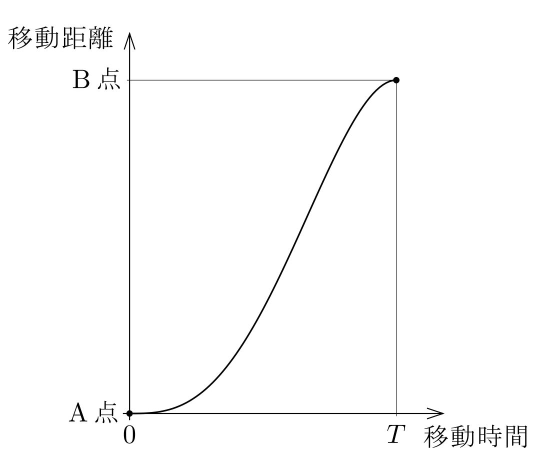


然るべき条件の下で，f のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は $n\to\infty$ のときある定数に収束します；このとき，f のグラフを上側の境界線とする図形の面積は f のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ です．このように考えて面積を求める方法を区分求積法といいます．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例解}}$　物体が一定の向きに A 点から B 点まで移動したとします．距離の単位を km とし，時間の単位を分とし，速度の単位を km/分 とします．A 点から移動を始めてから一定時間 T の間一定速度 v で移動したとき，移動時間に対する移動距離のグラフは例えば右図のような線分であり，A 点から B 点までの移動距離は移動速度 v と移動時間 T との積 vT です．



しかし，例えば A 点に静止していた物体が B 点まで移動して静止するとき，普通には，動き始めた後に次第に速度を上げて，止まる前に次第に速度を下げます．このように移動速度が変化すると，移動時間に対する移動距離のグラフは例えば右図のような曲線になります．$0\leq x\leq T$ である各実数 x に対して，物体が A 点から移動を始めてから x 分後の移動速度を $f(x)$ とおきます．このように物体の移動速度が変化するときの移動距離を近似的に求めることを考えます．



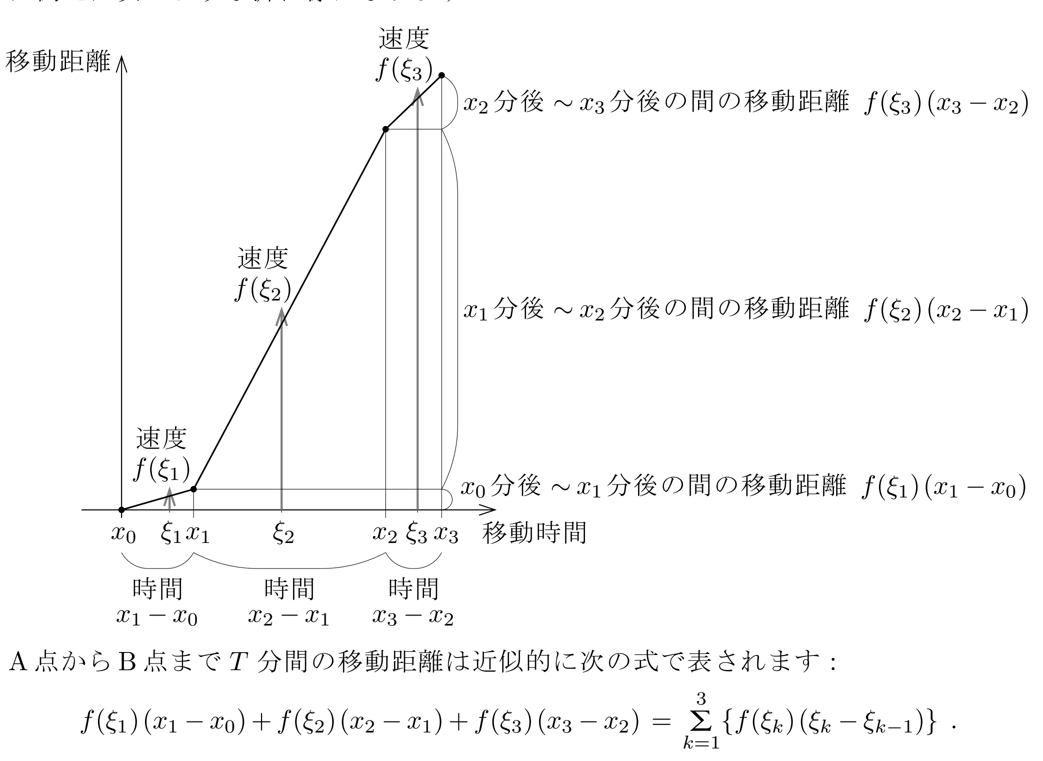
A 点から B 点までの物体が移動した時間を仮に 3 分割して考えます．

$$0=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3=T$$

である実数 x_0,x_1,x_2,x_3 をとります；そして，A 点から B 点まで物体が移動した時間を，A 点から移動を始めてから，x_0 分後から x_1 分後までの間と，x_1 分後から x_2 分後までの間と，x_2 分後から x_3 分後までの間との 3 つの時間に分割します．そして，

$$x_0\leq\xi_1\leq x_1\ ,\quad x_1\leq\xi_2\leq x_2\ ,\quad x_2\leq\xi_3\leq x_3$$

である実数 ξ_1,ξ_3,ξ_3 をとります．A 点から移動を始めてから，ξ_1 分後の移動速度は $f(\xi_1)$ で，ξ_2 分後の移動速度は $f(\xi_2)$ で，ξ_3 分後の移動速度は $f(\xi_3)$ です．A 点から移動を始めてから，x_0 分後から x_1 分後までの (x_1-x_0) 分間において一定速度 $f(\xi_1)$ で移動すると移動距離は $f(\xi_1)(x_1-x_0)$ で，x_1 分後から x_2 分後までの (x_2-x_1) 分間において一定速度 $f(\xi_2)$ で移動すると移動距離は $f(\xi_2)(x_2-x_1)$ で，x_2 分後から x_3 分後までの (x_3-x_2) 分間において一定速度 $f(\xi_3)$ で移動すると移動距離は $f(\xi_3)(x_3-x_2)$ です．従って，移動時間と移動距離との関係を近似するグラフは例えば次のような折れ線になります．



A 点から B 点まで T 分間の移動距離は近似的に次の式で表されます：

$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)=\sum_{k=1}^{3}\{f(\xi_k)(\xi_k-\xi_{k-1})\}\ .$$

正の自然数 n に対して，

$$0=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\cdots\leq x_{n-1}\leq x_n=T$$

である実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ をとります．A 点から B 点までの物体の移動時間 T 分間を，A 点から移動を始めてから，x_0 分後から x_1 分後までの間，x_1 分後から x_2 分後までの間，x_2 分後から x_3 分後までの間，…，x_{n-1} 分後から x_n 分後までの間，の n 個の短い時間に分割します．次に，

$$x_0\leq\xi_1\leq x_1\ ,\quad x_1\leq\xi_2\leq x_2\ ,\quad x_2\leq\xi_3\leq x_3\ ,\quad\cdots,\quad x_{n-1}\leq\xi_n\leq x_n$$

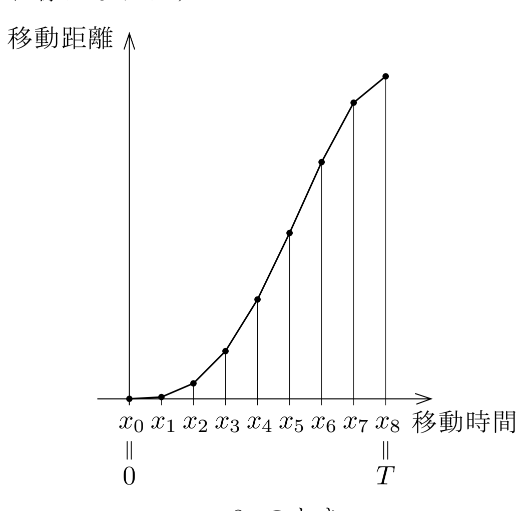
である実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ をとります．$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，A 点から移動を始めてから ξ_k 分後の移動速度は $f(\xi_k)$ です．A 点から移動を始めてから x_{k-1} 分後から x_k 分後までの (x_k-x_{k-1}) 分間において一定速度 $f(\xi_k)$ で移動すると移動距離は $f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ です．これらの総和

$$\begin{aligned}&f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\&=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\end{aligned}$$

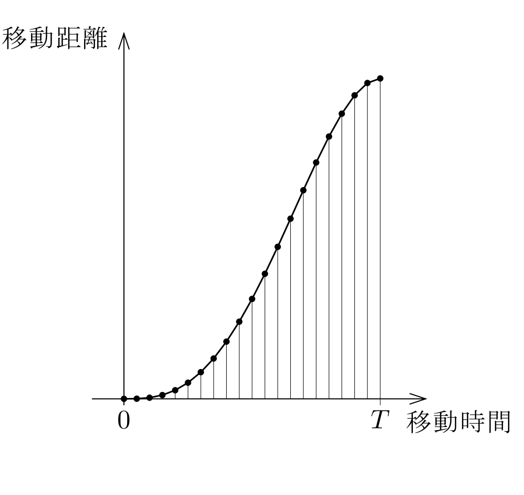
が A 点から B 点までの物体の移動距離を近似する式です．この式は関数 f のリーマン和です．これを S_n とおきます：

$$\begin{aligned}S_n&=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})\\&=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\ .\end{aligned}$$

このように近似するときの移動時間と移動距離との関係を表すグラフは次のような折れ線になります．



$n=8$ のとき



$n=20$ のとき

分割の数 n を大きくしていくと，移動距離の近似は正確になるようなので，移動距離の近似値 S_n は実際の移動距離に近づきます．従って，移動速度のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が唯一つあるならば，この極限値が実際の移動距離になります．このようなことは数学的には微分積分の基本定理によって裏付けられます．　$\boxed{\text{終}}$

このように，一定量と一定量の掛け算で計算できる量を，量が変化するときはしばしばリーマン和の極限値と考えます．リーマン和のある条件を満たす極限値が定積分です．つまり定積分はリーマン和の極限値で，掛け算の拡張です．

---

[1] n の値が変わると $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ の値も（大抵は）変わります．

[2] n の値が変わると $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ の値も（大抵は）変わります．

[3] リーマンは 19 世紀のドイツの数学者です．

[4] $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ でないと収束しないリーマン和がいくらでもできます．

[5] 極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が，自然数 n に対する実数 $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ のとりかたとは無関係に決まるということです．