§2.2　確率変数の関数

定義　確率変数 X の関数 $\varphi(X)$ について，$Y=\varphi(X)$ となる変数 Y が確率変数であるとき，この変数を確率変数 $\varphi(X)$ という．

確率変数 X に対して，変数 Y を $Y=pX+q$ （p,q は定数） とおきます．$p>0$ のとき，任意の実数 a について，

$$Y \le a \iff pX+q \le a \iff pX \le a-q \iff X \le \frac{a-q}{p} ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\,Y \le a\,) = \mathrm{P}\left(\,X \le \frac{a-q}{p}\,\right) .$$

$p=0$ のとき，任意の実数 a について，

$$Y \le a \iff q \le a ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\,Y \le a\,) = \begin{cases} 1 & (\,q \le a \text{ のとき}) \\ 0 & (\,q > a \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$p<0$ のとき，任意の実数 a について，

$$Y \le a \iff pX+q \le a \iff pX \le a-q \iff X \ge \frac{a-q}{p} ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\,Y \le a\,) = \mathrm{P}\left(\,X \ge \frac{a-q}{p}\,\right) .$$

このように，任意の実数 a に対して $Y \le a$ となる確率 $\mathrm{P}(\,Y \le a\,)$ が決まります．よって確率変数 X の関数 $Y=pX+q$ はやはり確率変数です．

確率変数 X に対して，変数 Y を $Y=X^2$ とおきます．実数 a について $a \ge 0$ のとき，

$$Y \le a \iff X^2 \le a \iff -\sqrt{a} \le X \le \sqrt{a} ,$$

よって $\mathrm{P}(\,Y \le a\,) = \mathrm{P}(\,-\sqrt{a} \le X \le \sqrt{a}\,)$．確率変数 X の値は実数なので，実数 a について $a \le 0$ のとき，$X^2 < a$ つまり $Y < a$ となることはありません；従って $\mathrm{P}(\,Y \le a\,) = 0$ です．このように，任意の実数 a に対して $Y \le a$ となる確率 $\mathrm{P}(\,Y \le a\,)$ が決まりますから，確率変数 X の 2 次関数 $Y=X^2$ はやはり確率変数です．

このような議論を発展させると次の定理が導かれます．

定理 2.2　変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ に対して，確率変数 X の関数 $Y=\varphi(X)$ も確率変数である．

例題 2.2.1　あるさいころを投げてでる目の数を変数 X で表す．このさいころはどの目も等確率ででるとする．このとき変数 X は確率変数になる．更に，確率変数 Y を $Y=X^2-6X$ とおく．確率 $\mathrm{P}(\,Y \le -7\,)$ を求める．

$$\begin{aligned} Y \le -7 &\iff X^2-6X \le -7 \iff X^2-6X+7 \le 0 \\ &\iff 3-\sqrt{2} \le X \le 3+\sqrt{2} . \end{aligned}$$

確率変数 X がとり得る値は 1 から 6 までの自然数だけなので，

$$\mathrm{P}(\,Y \le -7\,) = \mathrm{P}\left(\,3-\sqrt{2} \le X \le 3+\sqrt{2}\,\right) = \mathrm{P}(\,2 \le X \le 4\,) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} .$$

終

問題 2.2　ジョーカーを除く 52 枚のトランプカードから等確率で 1 枚のカードを取り出し，カードの数を調べます．ジャックは 11 と，クイーンは 12 と，キングは 13 とみなします．取り出したカードの数を表す変数を X とおきます．この変数 X は確率変数です．更に，確率変数 Y を $Y=X^2-8X$ とおきます．確率 $\mathrm{P}(\,Y \le -9\,)$ を求めなさい．