

§ 2.3 確率変数の平均値

1.2節で述べたように、データの代表値として平均がありました。同じように、確率変数についても平均値の概念があります。

例えば、あるくじには当たりと外れとがあり、当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金10万円を貰えて、外れると賞金は貰えないものとします。このくじを何回も引くと、大数の法則より、20回に1回ぐらいの割合で賞金10万円を貰えます；1回あたりの平均では $10\text{万円} \times \frac{1}{20} = 5000\text{円}$ 貰えます。このようにして、確率変数の1回あたりの平均を考えることができます。

例えば、あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと外れとがあり、1等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金10万円を貰え、2等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{5}$ で当たると賞金1万円を貰え、外れると賞金を貰えないものとします。このくじを何回も引くときの1回あたりの貰える賞金の平均は次のようになります：

$$10\text{万円} \times \frac{1}{20} + 1\text{万円} \times \frac{1}{5} = 5000\text{円} + 2000\text{円} = 7000\text{円} .$$

このように、離散型確率変数の平均値は、確率変数の値とその値をとる確率との積の合計です。

離散型確率変数 X に対して、次の (1), (2) のうちのどちらかが成り立ちました：

(1) 相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0 \leq n \leq N}$ (N は自然数) があって

$$\sum_{n=0}^N P(X = x_n) = 1 ;$$

(2) 相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ があって

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) = 1 .$$

定義 離散型確率変数 X の平均値 $E[X]$ を次のように定義する：相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0 \leq n \leq N}$ (N は自然数) があって $\sum_{n=0}^N P(X = x_n) = 1$ となるとき、 X の平均値 $E[X]$ は

$$E[X] = \sum_{n=0}^N \{x_n P(X = x_n)\} ;$$

相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ があって $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) = 1$ となるとき、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \{x_n P(X = x_n)\}$ が収束するならば、 X の平均値 $E[X]$ は

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \{x_n P(X = x_n)\} .$$

確率変数 X の実現値を調べる試行を何回も行うと、 X の実現値は様々な値になり得ます。確率変数 X の平均値とは、大雑把にいうと、試行を何回も行うときの X の実現値の平均です。確率変数の平均値のことを期待値ということもあります。

例題 2.3.1 あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと3等賞の当たりと外れとがある。1等賞が当たる確率は $\frac{1}{100}$ で当たると50000円の賞金が貰え、2等賞が当たる確率は $\frac{1}{50}$ で当たると10000円の賞金が貰え、3等賞が当たる確率は $\frac{1}{20}$ で当たると5000円の賞金が貰え、外れると賞金は貰えない。1等賞が当たることと2等賞が当たることと3等賞が当たることとは互いに独立である。無作為にこのくじを引いたときに貰える賞金の金額(単位は円)を表す変数を X とおく。この変数 X は確率変数である。確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求める。

確率変数 X の平均値 $E[X]$ は

$$\begin{aligned} E[X] &= 50000 \cdot P(X = 50000) + 10000 \cdot P(X = 10000) + \\ &\quad 5000 \cdot P(X = 5000) + 0 \cdot P(X = 0) \\ &= 50000 \cdot \frac{1}{100} + 10000 \cdot \frac{1}{50} + 5000 \cdot \frac{1}{20} = 500 + 200 + 250 \\ &= 950 . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 2.3.1 あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと3等賞の当たりと外れとがあります。1等賞が当たる確率は $\frac{1}{50}$ で当たると10000円の賞金が貰え、2等賞が当たる確率は $\frac{1}{20}$ で当たると5000円の賞金が貰え、3等賞が当たる確率は $\frac{1}{5}$ で当たると2000円の賞金が貰え、外れると賞金は貰えません。1等賞が当たることと2等賞が当たることと3等賞が当たることとは互いに独立です。無作為にこのくじを引いたときに貰える賞金の金額(単位は円)を表す変数を X とおきます。この変数 X は確率変数です。確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求めなさい。

連続型確率変数の平均値を考えます。例として、人が長さを測らずに目分量で紐を3mになるべく近い長さで切り出すとき、切り出した紐の実際の長さ(単位はm)を表す変数を X とおきます。この確率変数 X に関する確率について、次のように階級幅を $\Delta x = 0.5$ として度数分布表のようなものを考えます。

x	$x + \Delta x$	確率 $P(x < X \leq x + \Delta x)$	階級値
$-\infty$	2	0	
2	2.5	0.104	2.25
2.5	3	0.446	2.75
3	3.5	0.401	3.25
3.5	4	0.049	3.75
4	∞	0	

このとき、離散型確率変数の平均値の定義に対応して、確率変数 X の平均値 $E[X]$ は次のように近似できると考えます：

$$\begin{aligned} E[X] &\doteq 2.25 \times P(2 \leq X \leq 2.5) + 2.75 \times P(2.5 \leq X \leq 3) \\ &\quad + 3.25 \times P(3 \leq X \leq 3.5) + 3.75 \times P(3.5 \leq X \leq 4) \\ &= 2.25 \times 0.104 + 2.75 \times 0.446 + 3.25 \times 0.401 + 3.75 \times 0.049 \\ &= 2.948 . \end{aligned}$$

この考え方を一般化します。

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とおきます。実数 a, b について $a < b$ で、 X のとり得る値は a 以上 b 以下とします。

正の自然数 n に対して $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、区間 $[a, b]$ を n 個の小さい区間つまり階級 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割します。階級 $[x_0, x_1]$ の階級幅 $x_1 - x_0$ 、階級 $[x_1, x_2]$ の階級幅 $x_2 - x_1$ 、階級 $[x_2, x_3]$ の階級幅 $x_3 - x_2, \dots$ 、階級 $[x_{n-1}, x_n]$ の階級幅 $x_n - x_{n-1}$ 、の中で最も大きいものを δ_n とおきます：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき δ_n は0に収束するとします； $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

各階級 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) に属す階級値 ξ_k に対して、確率変数 X の平均値を次の式の値で近似します：

$$\begin{aligned} &\xi_1 P(x_0 \leq X \leq x_1) + \xi_2 P(x_1 \leq X \leq x_2) + \xi_3 P(x_2 \leq X \leq x_3) + \dots \\ &\quad + \xi_{n-1} P(x_{n-2} \leq X \leq x_{n-1}) + \xi_n P(x_{n-1} \leq X \leq x_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \{\xi_k P(x_{k-1} \leq X \leq x_k)\} . \end{aligned}$$

$\Delta x = x_k - x_{k-1}$ とおくと $\frac{P(x_{k-1} \leq X \leq x_k)}{x_k - x_{k-1}} = \frac{P(x_{k-1} \leq X \leq x_{k-1} + \Delta x)}{\Delta x} \doteq f(\xi_k)$ なので

$$P(x_{k-1} \leq X \leq x_k) \doteq f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) ,$$

よって確率変数 X の平均値を次の式 S_n の値で近似します：

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{\xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

これは関数 $xf(x)$ のリーマン和です。 $n \rightarrow \infty$ のとき S_n が収束するならば、極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を確率変数 X の平均値とします。 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

が0に収束するので、関数 $xf(x)$ が a から b まで定積分可能であるならば、関数 $xf(x)$ のリーマン和 S_n の極限値は定積分 $\int_a^b xf(x)dx$ です：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b xf(x)dx .$$

このように考えて、関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり、 X の取りうる値が a 以上 b 以下であり、関数 $xf(x)$ が a から b まで定積分可能であるとき、 X の平均値は定積分 $\int_a^b xf(x)dx$ とします。

確率変数 X の値の範囲を限定しないときは次のように考えます：関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり、関数 $xf(x)$ が実数全体において広義積分可能であるとき、 X の平均値は広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ である。

定義 関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であるとき、 X の平均値 $E[X]$ を次のように定義する：広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ が収束するならば

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx .$$

例題 2.3.2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を例題 2.1.2 の関数と同じものと定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

例題 2.1.2 で確かめたように、この関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になる。この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求める。

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^6 x \frac{x(6-x)}{36} dx = \frac{1}{36} \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{36} \left[2x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^6 = \frac{1}{36} (2 \cdot 6^3 - 9 \cdot 6^2) \\ &= 3 . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 2.3.2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を問題 2.1.2 の関数と同じものと定めます：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(2x+3-x^2) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } x > 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

問題 2.1.2 で確かめたように、この関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になります。この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求めなさい。

確率変数の平均値は無いこともあります。

例題 2.3.3 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数になることを確かめる。更に、この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $E[X]$ を調べる。

まず $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ を確認する。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

更に、任意の実数 x について $f(x) \geq 0$. 従って関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になる。 $f(x)$ を確率密度関数とする確率変数 X の平均値 $E[X]$ を調べる。

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u x \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} [\ln x]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln u) \\ &= \infty . \end{aligned}$$

従って、確率変数 X の平均値 $E[X]$ は無い。 終

以下の定理が成り立ちます。証明は後の補遺に回します。

定理 2.3.1 確率変数 X の平均値 $E[X]$ があるならば、定数 c に対して、確率変数 $X+c$ の平均値は

$$E[X+c] = E[X] + c .$$

定理 2.3.2 確率変数 X の平均値 $E[X]$ があるならば、定数 k に対して、確率変数 kX の平均値は

$$E[kX] = kE[X] .$$

例題 2.3.4 確率変数 X について $E[X] = -\frac{7}{3}$ とする。変数 Y を $Y = \frac{6X+4}{5}$ とおく。確率変数 Y の平均値 $E[Y]$ を求める。

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\frac{6X+4}{5}\right] = \frac{1}{5}E[6X+4] = \frac{1}{5}(E[6X]+4) \\ &= \frac{1}{5}(6E[X]+4) = \frac{1}{5}\left\{6 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 4\right\} \\ &= -2 . \end{aligned}$$

問題 2.3.3 確率変数 X について $E[X] = \frac{7}{2}$ とします。変数 Y を $Y = \frac{9-4X}{5}$ とおきます。確率変数 Y の平均値 $E[Y]$ を求めなさい。

次の定理が成り立ちます。その証明は面倒なので略します。

定理 2.3.3 変数 X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が X の確率密度関数であるとき、変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ について広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$ が収束するならば、確率変数 $\varphi(X)$ について $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$.