第2章の補遺1　定理の証明

定理 2. 補遺 1.1　定数 c は実数とする．関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であるとき，X の関数 $X+c$ はやはり連続型確率変数であり，その確率密度関数は関数 $f(x-c)$ で与えられる．

証明　関数 $f(x)$ は連続型確率変数 X の確率密度関数であるとする．変数 x, y について $y=x+c$ とおく． $x=y-c$ ． $\dfrac{dy}{dx}=1$ より $dx=dy$ ．

$y=u$ のとき $x=u+c$ ， $y=v$ のとき $x=v+c$ なので，

$$\int_u^v f(y-c)\,dy = \int_{u+c}^{v+c} f(x)\,dx \ .$$

$u\to-\infty$ のとき $u+c\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $v+c\to\infty$ なので，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(y-c)\,dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v f(y-c)\,dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u+c}^{v+c} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\\ &=1\ .\end{aligned}$$

実数 a に対して，

$$X+c\le a \iff X\le a-c\ .$$

従って

$$\mathrm{P}(\,X+c\le a\,) = \mathrm{P}(\,X\le a-c\,) = \int_{-\infty}^{a-c} f(x)\,dx\ .$$

$x=u$ のとき $y=u+c$ ， $x=a-c$ のとき $y=a$ なので，

$$\int_u^{a-c} f(x)\,dx = \int_{u+c}^{a} f(y-c)\,dy\ .$$

$u\to-\infty$ のとき $u+c\to-\infty$ なので，

$$\int_{-\infty}^{a-c} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^{a-c} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u+c}^{a} f(y-c)\,dy = \int_{-\infty}^{a} f(y-c)\,dy\ .$$

従って，

$$\mathrm{P}(\,X+c\le a\,) = \int_{-\infty}^{a} f(y-c)\,dy\ .$$

故に，関数 $f(x-c)$ は確率変数 $X+c$ の確率密度関数である．従って確率変数 $X+c$ は連続型確率変数である．（証明終り）

定理 2.3.1　確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ があるならば，定数 c に対して，確率変数 $X+c$ の平均値は $\mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[X]+c$ ．

証明　変数 Y を $Y=X+c$ とおく．

X が離散型確率変数で，相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0\le n\le N}$ （ N は自然数） があって， $\sum\limits_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ とする． $\mathrm{E}[X]=\sum\limits_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}$ ． $n=0,1,2,\dots,N$ について，

$$X=x_n \iff X+c=x_n+c \iff Y=x_n+c\ ,$$

よって $\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=\mathrm{P}(\,Y=x_n+c\,)$ なので，

$$\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,Y=x_n+c\,) = \sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1\ .$$

従って $Y=X+c$ は離散型確率変数であり，その平均値 $\mathrm{E}[X+c]$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[Y] &= \sum_{n=0}^{N}\{(x_n+c)\,\mathrm{P}(\,Y=x_n+c\,)\}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\{(x_n+c)\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)+c\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}+c\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=\mathrm{E}[X]+c\cdot1\\ &=\mathrm{E}[X]+c\ .\end{aligned}$$

X が離散型確率変数で，相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n\ge0}$ があって $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ となるときも同様である．

X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ は X の確率密度関数であるとする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\ ,\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \mathrm{E}[X]\ .$$

定理 2. 補遺 1.1 より，関数 $f(x-c)$ が Y の確率密度関数なので，

$$\mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(y-c)\,dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v y\,f(y-c)\,dy\ .$$

$x=y-c$ とおく． $y=x+c$ ． $\dfrac{dy}{dx}=1$ より $dy=dx$ ． $u\to-\infty$ のとき $u-c\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $v-c\to\infty$ ．よって

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v y\,f(y-c)\,dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c}(x+c)\,f(x)\,dx\\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c}\{x\,f(x)+c\,f(x)\}\,dx\\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\Big\{\int_{u-c}^{v-c}x\,f(x)\,dx + c\int_{u-c}^{v-c}f(x)\,dx\Big\}\\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c}x\,f(x)\,dx + c\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c}f(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx + c\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx = \mathrm{E}[X]+c\cdot1\\ &= \mathrm{E}[X]+c\ .\end{aligned}$$

従って $\mathrm{E}[X+c]=\mathrm{E}[X]+c$ ．（証明終り）

定理 2. 補遺 1.2　定数 k は実数で $k\ne0$ とする．関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であるとき，X の関数 kX はやはり連続型確率変数であり，その確率密度関数は， $k>0$ のとき関数 $\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ で， $k<0$ のとき関数 $-\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ で与えられる．

証明　 $k>0$ のときを証明する．関数 $f(x)$ は連続型確率変数 X の確率密度関数であるとする．変数 x,y について $y=kx$ とおく． $x=\dfrac{y}{k}$ ． $\dfrac{dy}{dx}=k$ より $dx=\dfrac{1}{k}dy$ ．

$y=u$ のとき $x=\dfrac{u}{k}$ ， $y=v$ のとき $x=\dfrac{v}{k}$ なので，

$$\int_u^v \frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}}\frac{1}{k}f(x)\,k\,dx = \int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}}f(x)\,dx\ ,$$

$k>0$ より， $u\to-\infty$ のとき $\dfrac{u}{k}\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $\dfrac{v}{k}\to\infty$ なので，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}}f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\\ &=1\ .\end{aligned}$$

実数 a に対して，

$$kX\le a \iff X\le\frac{a}{k}\ .$$

従って

$$\mathrm{P}(\,kX\le a\,) = \mathrm{P}\Big(\,X\le\frac{a}{k}\,\Big) = \int_{-\infty}^{\frac{a}{k}}f(x)\,dx\ .$$

$x=u$ のとき $y=ku$ ， $x=\dfrac{a}{k}$ のとき $y=a$ なので，

$$\int_u^{\frac{a}{k}}f(x)\,dx = \int_{ku}^{a}f\Big(\frac{y}{k}\Big)\frac{1}{k}dy = \int_{ku}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy\ .$$

$k>0$ より $u\to-\infty$ のとき $ku\to-\infty$ なので，

$$\int_{-\infty}^{\frac{a}{k}}f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^{\frac{a}{k}}f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{ku}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \int_{-\infty}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy\ .$$

従って，

$$\mathrm{P}(\,kX\le a\,) = \int_{-\infty}^{a}\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy\ .$$

故に，関数 $\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ は確率変数 kX の確率密度関数である．従って確率変数 kX は連続型確率変数である．（証明終り）

定理 2.3.2　確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ があるならば，定数 k に対して，確率変数 kX の平均値は $\mathrm{E}[kX]=k\,\mathrm{E}[X]$ ．

証明　 $k=0$ のとき，

$$\mathrm{E}[kX]=\mathrm{E}[0]=0\ ,\qquad k\,\mathrm{E}[X]=0\,\mathrm{E}[X]=0\ ,$$

従って $\mathrm{E}[kX]=k\,\mathrm{E}[X]$ ．

$k\ne0$ とする．変数 Y を $Y=kX$ とおく．

X が離散型確率変数で，相異なる実数からなる有限数列 $\{x_n\}_{0\le n\le N}$ （ N は自然数） があって， $\sum\limits_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ とする． $\mathrm{E}[X]=\sum\limits_{n=0}^{N}\{x_i\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}$ ． $n=0,1,2,\dots,N$ について，

$$X=x_n \iff kX=kx_n \iff Y=kx_n\ ,$$

よって $\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=\mathrm{P}(\,Y=kx_n\,)$ なので，

$$\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,Y=kx_n\,) = \sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1\ .$$

従って $Y=kX$ は離散型確率変数であり，その平均値 $\mathrm{E}[kX]$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[kX]=\mathrm{E}[Y] &= \sum_{n=0}^{N}\{(kx_n)\,\mathrm{P}(\,Y=kx_n\,)\}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\{kx_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\} = k\sum_{n=0}^{N}\{x_n\,\mathrm{P}(\,X=x_n\,)\}\\ &= k\,\mathrm{E}[X]\ .\end{aligned}$$

X が離散型確率変数で，相異なる実数からなる無限数列 $\{x_n\}_{n\ge0}$ があって $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}(\,X=x_n\,)=1$ となるときも同様である．

X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ は X の確率密度関数であるとする． $\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx=\mathrm{E}[X]$ ． $k>0$ とする．定理 2. 補遺 1.2 より関数 $\dfrac{1}{k}f\Big(\dfrac{x}{k}\Big)$ が Y の確率密度関数なので，

$$\mathrm{E}[kX]=\mathrm{E}[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}y\,\frac{1}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v\frac{y}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy\ .$$

$x=\dfrac{y}{k}$ とおく． $y=kx$ ． $\dfrac{dy}{dx}=k$ より $dy=k\,dx$ ． $k>0$ なので， $u\to-\infty$ のとき $\dfrac{u}{k}\to-\infty$ ， $v\to\infty$ のとき $\dfrac{v}{k}\to\infty$ ．よって

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v\frac{y}{k}f\Big(\frac{y}{k}\Big)dy &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}}x\,f(x)\,k\,dx\\ &= k\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{\frac{u}{k}}^{\frac{v}{k}}x\,f(x)\,dx = k\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx\\ &= k\,\mathrm{E}[X]\ .\end{aligned}$$

従って $\mathrm{E}[kX]=k\,\mathrm{E}[X]$ ． $k<0$ のときも同様に証明できる．（証明終り）

定理 2. 補遺 1.3　関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であるとき， X の関数 X^2 はやはり連続型確率変数であり，その確率密度関数は次のような関数 $g(y)$ で与えられる：

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\} & (\ y>0\ \text{のとき})\\ 0 & (\ y\le0\ \text{のとき})\end{cases}\ .$$

証明　関数 $f(x)$ は連続型確率変数 X の確率密度関数であるとする．

実数 a について $a>0$ とする．関数 $g(y)$ について $\lim\limits_{y\to+0}g(y)=+\infty$ となる可能性があるので， $g(y)$ の定積分 $\int_0^a g(y)\,dy$ を計算するには広義積分する必要がある．変数 x,y について $x=\sqrt{y}$ とおく． $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ より $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}dy=dx$ ．任意の正の実数 ε に対して，関数 $g(y)$ の定義より，

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^a g(y)\,dy &= \int_\varepsilon^a\frac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\}dy\\ &= \int_\varepsilon^a\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}\{f(x)+f(-x)\}\,dx\\ &= \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(-x)\,dx\ .\end{aligned}$$

ここで， $t=-x$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(-x)\,dx &= \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{-\sqrt{a}}f(t)\,(-dt) = -\int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{-\sqrt{a}}f(t)\,dt = \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}}f(t)\,dt\\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}}f(x)\,dx\ ;\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^a g(y)\,dy &= \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(-x)\,dx = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx+\int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}}f(x)\,dx\\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}}f(x)\,dx+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

関数 $f(x)$ は区間 $\big[-\sqrt{a}\,,\sqrt{a}\,\big]$ において積分可能なので，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Big\{\int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}}f(x)\,dx+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx\Big\} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx\ .$$

従って

$$\begin{aligned}\int_0^a g(y)\,dy &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a g(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big\{\int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{\varepsilon}}f(x)\,dx+\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx\Big\}\\ &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

関数 $f(x)$ は 確率変数 X の確率密度関数なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\,dy = \lim_{u\to\infty}\int_0^u g(y)\,dy = \lim_{u\to\infty}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx = 1\ .$$

また，

$$\int_{-\infty}^{a}g(y)\,dy = \int_0^a g(y)\,dy = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}f(x)\,dx = \mathrm{P}(\,-\sqrt{a}\le X\le\sqrt{a}\,)\ ;$$

ここで

$$X^2\le a \iff -\sqrt{a}\le X\le\sqrt{a}$$

より $\mathrm{P}(\,-\sqrt{a}\le X\le\sqrt{a}\,)=\mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big)$ なので，

$$\int_{-\infty}^{a}g(y)\,dy = \mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big)\ .$$

実数 a について $a\le0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{a}g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{a}0\,dy = 0 = \mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big)\ .$$

故に，任意の実数 a について $\mathrm{P}\big(\,X^2\le a\,\big)=\int_{-\infty}^{a}g(y)\,dy$ ．つまり関数 $g(y)$ は確率変数 X^2 の確率密度関数である．従って確率変数 X^2 は連続型確率変数である．

（証明終り）

定理 2. 補遺 1.4　変数 X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が X の確率密度関数であるとき，広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx$ が収束するならば，確率変数 X^2 の平均値は $\mathrm{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx$ ．

証明　関数 $f(x)$ は連続型確率変数 X の確率密度関数であるとする．補助定理 2. 補遺 1.3 より，確率変数 X^2 の確率密度関数は次のような関数 $g(y)$ で与えられる：

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\} & (\ y>0\ \text{のとき})\\ 0 & (\ y\le0\ \text{のとき})\end{cases}\ .$$

$Y=X^2$ とおく．

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X^2]=\mathrm{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty}y\,g(y)\,dy = \int_0^{\infty}y\frac{1}{2\sqrt{y}}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\}dy\\ &= \lim_{u\to\infty}\int_0^u\frac{\sqrt{y}}{2}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\}dy\ .\end{aligned}\tag{1}$$

$x=\sqrt{y}$ とおく． $y=x^2$ ． $\dfrac{dy}{dx}=2x$ より $dy=2x\,dx$ ．

$$\begin{aligned}\int_0^u\frac{\sqrt{y}}{2}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\}dy &= \int_0^{\sqrt{u}}\frac{x}{2}\{f(x)+f(-x)\}\,2x\,dx\\ &= \int_0^{\sqrt{u}}x^2\{f(x)+f(-x)\}\,dx\\ &= \int_0^{\sqrt{u}}x^2f(x)\,dx+\int_0^{\sqrt{u}}x^2f(-x)\,dx\ .\end{aligned}\tag{2}$$

$t=-x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{u}}x^2f(-x)\,dx &= \int_0^{-\sqrt{u}}(-t)^2f(t)\,(-dt) = -\int_0^{-\sqrt{u}}x^2f(t)\,dt = \int_{-\sqrt{u}}^{0}x^2f(t)\,dt\\ &= \int_{-\sqrt{u}}^{0}x^2f(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{u}}x^2f(x)\,dx+\int_0^{\sqrt{u}}x^2f(-x)\,dx &= \int_0^{\sqrt{u}}x^2f(x)\,dx+\int_{-\sqrt{u}}^{0}x^2f(x)\,dx\\ &= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}x^2f(x)\,dx\ .\end{aligned}\tag{3}$$

等式 (2) と (3) とより $\displaystyle\int_0^u\frac{\sqrt{y}}{2}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\}dy=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}x^2f(x)\,dx$ なので，

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\int_0^u\frac{\sqrt{y}}{2}\big\{f\big(\sqrt{y}\big)+f\big(-\sqrt{y}\big)\big\}dy &= \lim_{u\to\infty}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}x^2f(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

等式 (1) とこの等式とより $\mathrm{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx$ ．（証明終り）

定理 2.4.1　関数 $f(x)$ が確率変数 X の確率密度関数であるとき，X の平均値を μ とおくと

$$\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx\ .$$

証明　関数 $f(x)$ は確率変数 X の確率密度関数であるとする．

定理 2. 補遺 1.1 より確率変数 $X-\mu$ の確率密度関数は $f(x+\mu)$ なので，定理 2. 補遺 1.4 より，

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x+\mu)\,dx = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2f(x+\mu)\,dx\ .$$

変数 t を $t=x+\mu$ とおく．

$$\int_u^v x^2f(x+\mu)\,dx = \int_{u+\mu}^{v-c}(v+\mu)^2f(t)\,dt\ .$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2f(x+\mu)\,dx &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u+\mu}^{v+\mu}(t-\mu)^2f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu)^2f(t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

故に $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx$ ．（証明終り）

定理 2. 補遺 1.5　確率変数 X 及び定数 c に対して，

$$\mathrm{E}[(X+c)^2]=\mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2\ .$$

証明　確率変数 X が連続型確率変数である場合を証明する．関数 $f(x)$ は X の確率密度関数であるとする．

定理 2. 補遺 1.1 より確率変数 $X+c$ の確率密度関数は $f(x-c)$ なので，定理 2. 補遺 1.4 より，

$$\mathrm{E}[(X+c)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x-c)\,dx = \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2f(x-c)\,dx\ .\tag{1}$$

変数 t を $t=x-c$ とおく．

$$\begin{aligned}\int_u^v x^2f(x-c)\,dx &= \int_{u-c}^{v-c}(t+c)^2f(t)\,dt = \int_{u-c}^{v-c}(t^2+2ct+c^2)f(t)\,dt\\ &= \int_{u-c}^{v-c}t^2f(t)\,dt+2c\int_{u-c}^{v-c}t\,f(t)\,dt+c^2\int_{u-c}^{v-c}f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_u^v x^2f(x-c)\,dx\\ &= \lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c}t^2f(t)\,dt+2c\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c}t,f(t)\,dt+c^2\lim_{\substack{v\to\infty\\u\to-\infty}}\int_{u-c}^{v-c}f(t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}t^2f(t)\,dt+2c\int_{-\infty}^{\infty}t\,f(t)\,dt+c^2\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt\ .\end{aligned}\tag{2}$$

$\int_{-\infty}^{\infty}t^2f(t)\,dt=\mathrm{E}[X^2]$ ， $\int_{-\infty}^{\infty}t\,f(t)\,dt=\mathrm{E}[X]$ ， $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt=1$ なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2f(t)\,dt+2c\int_{-\infty}^{\infty}t\,f(t)\,dt+c^2\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt=\mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2\ .\tag{3}$$

等式 (1) , (2) , (3) より $\mathrm{E}[(X+c)^2]=\mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2$ ．（証明終り）

定理 2.4.2　確率変数 X の分散 $\mathrm{V}[X]$ があるならば，定数 c に対して， $\mathrm{V}[X+c]=\mathrm{V}[X]$ ， $\sigma[X+c]=\sigma[X]$ ．

証明　定理 2.4.1 と定理 2. 補遺 1.5 とより，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[X+c] &= \mathrm{E}[(X+c)^2]-\{\mathrm{E}[X+c]\}^2 = \mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2-\{\mathrm{E}[X]+c\}^2\\ &= \mathrm{E}[X^2]+2c\,\mathrm{E}[X]+c^2-\{\mathrm{E}[X]^2-2c\,\mathrm{E}[X]+c^2\}^2 = \mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2\\ &= \mathrm{V}[X]\ .\end{aligned}$$

更にこのことより，

$$\sigma[X+c]=\sqrt{\mathrm{V}[X+c]}=\sqrt{\mathrm{V}[X]}=\sigma[X]\ .$$

（証明終り）

定理 2.4.3　確率変数 X の分散 $\mathrm{V}[X]$ があるならば，定数 k に対して， $\mathrm{V}[kX]=k^2\,\mathrm{V}[X]$ ， $\sigma[kX]=|k|\,\sigma[X]$ ．

証明　定理 2.4.1 と定理 2.3.2 とより，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[kX] &= \mathrm{E}[(kX)^2]-\{\mathrm{E}[kX]\}^2 = \mathrm{E}[k^2X^2]-\{k\,\mathrm{E}[X]\}^2\\ &= k^2\,\mathrm{E}[X^2]-k^2\,\mathrm{E}[X]^2 = k^2\{\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2\}\\ &= k^2\,\mathrm{V}[X]\ .\end{aligned}$$

更にこのことより，

$$\sigma[kX]=\sqrt{\mathrm{V}[kX]}=\sqrt{k^2\,\mathrm{V}[X]}=\sqrt{k^2}\sqrt{\mathrm{V}[X]}=|k|\,\sigma[X]\ .$$

（証明終り）

定理 2.4.4　確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と確率変数 X^2 の平均値 $\mathrm{E}[X^2]$ とがあるならば， X の分散 $\mathrm{V}[X]$ は $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2$ ．

証明　 $\mu=\mathrm{E}[X]$ とおく．定理 2. 補遺 1.5 より，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(X-\mu)^2] &= \mathrm{E}[X^2]-2\mu\,\mathrm{E}[X]+\mu^2 = \mathrm{E}[X^2]-2\mu\mu+\mu^2 = \mathrm{E}[X^2]-\mu^2\\ &= \mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2\ .\end{aligned}$$

（証明終り）