

## 第2章の補遺2 チェビシエフの不等式

正の実数  $K$  に対して、確率変数  $X$  の値が定数  $\mu$  より  $K$  以上離れるということ式で表すと  $|X - \mu| \geq K$  となります：

$$\begin{aligned} |X - \mu| \geq K &\iff X - \mu \leq -K \text{ または } X - \mu \geq K \\ &\iff X \leq \mu - K \text{ または } X \geq \mu + K . \end{aligned}$$

このようになる確率の値の範囲を制限することができます。

**定理** (チェビシエフの不等式) 確率変数  $X$  の平均値が  $\mu$  で標準偏差が  $\sigma$  であるとき、任意の正の実数  $K$  に対して

$$P(|X - \mu| \geq K) \leq \frac{\sigma^2}{K^2} .$$

**証明** 確率変数  $X$  が連続型確率変数であるときを扱う。

確率変数  $Y$  を  $Y = X - \mu$  とおく。この確率変数  $Y$  の確率密度関数を  $g(x)$  とおく。定理2.補遺1.4より、

$$\begin{aligned} \sigma^2 = V[X] &= E[(X - \mu)^2] = E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y) dy + \int_{-K}^K y^2 g(y) dy + \int_K^{\infty} y^2 g(y) dy ; \end{aligned}$$

$$y^2 g(y) \geq 0 \text{ より } \int_{-K}^K y^2 g(y) dy \geq 0 \text{ なので,}$$

$$\int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y) dy + \int_K^{\infty} y^2 g(y) dy \geq \int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y) dy + \int_K^{\infty} y^2 g(y) dy ;$$

$y \geq K$  のときも  $y \leq -K$  のときも  $y^2 \geq K^2$  なので、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-K} y^2 g(y) dy + \int_K^{\infty} y^2 g(y) dy &\geq \int_{-\infty}^{-K} K^2 g(y) dy + \int_K^{\infty} K^2 g(y) dy \\ &= K^2 \int_{-\infty}^{-K} g(y) dy + K^2 \int_K^{\infty} g(y) dy \\ &= K^2 P(Y \leq -K) + K^2 P(Y \geq K) \\ &= K^2 \{P(Y \leq -K) + P(Y \geq K)\} \\ &= K^2 P(|Y| \geq K) \\ &= K^2 P(|X - \mu| \geq K) . \end{aligned}$$

$$\text{よって } P(|X - \mu| \geq K) \leq \frac{\sigma^2}{K^2} .$$

(証明終り)