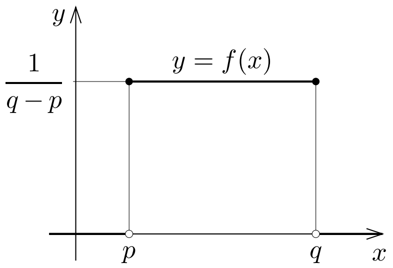
§3.3　一様分布

定数 p, q は実数で $p < q$ とします．関数 $f(x)$ を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p} & (\ p \leq x \leq q \ \text{のとき}) \\ 0 & (\ x < p \ \text{または} \ x > q \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ のグラフは右図のようになります．この関数 $f(x)$ について，任意の実数 x について $f(x) \geq 0$ であり，



$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_p^q \frac{1}{q-p}\,dx = \frac{1}{q-p}\big[x\big]_p^q \\ &= \frac{1}{q-p}(q-p) \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

従ってこの関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数になります．このような関数を確率密度関数とする確率分布を一様分布といいます．

定義　定数 p, q は実数で $p < q$ とする．確率変数 X が p から q までの一様分布 (uniform distribution) に従うとは，X の確率密度関数 $f(x)$ が次のように与えられることである：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p} & (\ p \leq x \leq q \ \text{のとき}) \\ 0 & (\ x < p \ \text{または} \ x > q \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

実数 p, q について $p < q$ であるとき，p から q までの一様分布に従う確率関数の値は，直観的にいうと，p から q までの間のどこも同じ確率になります．例えば，ある駅から20分間隔で電車が発車するとき，時刻を考えずにでたらめにこの駅に行くときに電車が発車するまで駅で待つ時間（単位は分）を表す変数 X は 0 から 20 までの一様分布に従うはずです．

実数 p, q について $p < q$ とします．p から q までの一様分布に従う確率変数 X の確率密度関数 f は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p} & (\ p \leq x \leq q \ \text{のとき}) \\ 0 & (\ x < p \ \text{または} \ x > q \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ とを求めます．

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \displaystyle\int_p^q x\frac{1}{q-p}\,dx = \frac{1}{q-p}\left[\frac{x^2}{2}\right]_p^q = \frac{1}{q-p}\frac{q^2-p^2}{2} \\ &= \frac{p+q}{2} \ . \end{aligned}$$

定理2.4.1より，

$$\mathrm{V}[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{p+q}{2}\right)^2 f(x)\,dx = \int_p^q \left(x - \frac{p+q}{2}\right)^2 \frac{1}{q-p}\,dx \ .$$

この定積分を簡単に計算するために $widey = x - \dfrac{p+q}{2}$ とおきます．$\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．$x = p$ のとき $y = \dfrac{p-q}{2}$ ，$x = q$ のとき $y = \dfrac{q-p}{2}$ ．

$$\begin{aligned} \int_p^q \left(x - \frac{p+q}{2}\right)^2 \frac{1}{q-p}\,dx &= \frac{1}{q-p}\textstyle\int_{\frac{p-q}{2}}^{\frac{q-p}{2}} y^2\,dy = \displaystyle\frac{1}{q-p}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{\frac{p-q}{2}}^{\frac{q-p}{2}} \\ &= \frac{1}{q-p}\left\{\frac{(q-p)^3}{24} - \frac{(p-q)^3}{24}\right\} = \frac{(q-p)^3 + (q-p)^3}{24(q-p)} \\ &= \frac{(q-p)^2}{12} \ . \end{aligned}$$

このように，p から q までの一様分布に従う確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ とは次のようになります：

$$\mathrm{E}[X] = \frac{p+q}{2} \ , \qquad \mathrm{V}[X] = \frac{(p-q)^2}{12} \ .$$