§3.4　正規分布

　自然数 n を大きくしていくときに2項分布 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ （に基づく分布）がどのようになるか考えます．　2項分布 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を X とおきます．　定理3.1より，

$$\mathrm{E}[X] = \frac{n}{2}\ , \qquad \mathrm{V}[X] = \frac{n}{4}\ .$$

従って，n が大きくなるに連れて $\mathrm{E}[X]$ も $\mathrm{V}[X]$ も大きくなります．　これでは考えにくいので，平均値と分散とが一定になるように2.4節で述べた“標準”を用います．確率変数を X を標準化した確率変数 T を考えます：

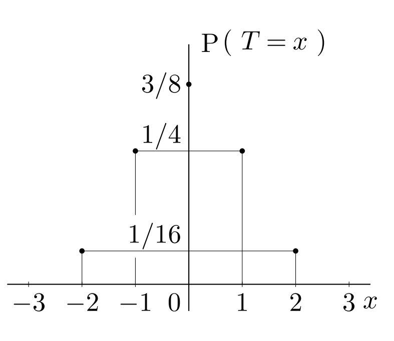
$$T = \frac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}\ .$$

定理2.4.5より，$\mathrm{E}[T] = 0$ ，$\sigma[T] = 1$ ．　つまり確率変数 T の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ は n の値とは無関係に一定です．　この確率変数 T がとる値の確率をグラフにしてみます．　例として $n = 4$ とします．　2項分布 $\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数 X に対して，確率変数 T は

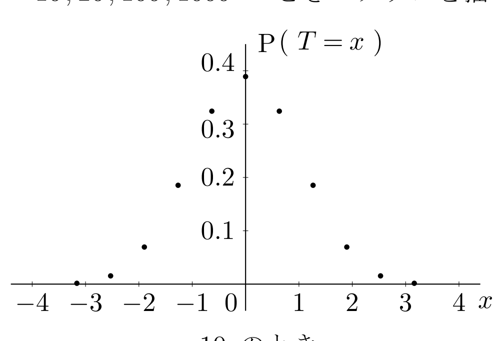
$$T = \frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{V}[X]}} = \frac{2X - 4}{\sqrt{4}} = X - 2\ ,$$

よって $X = T + 2$ ．　従って，

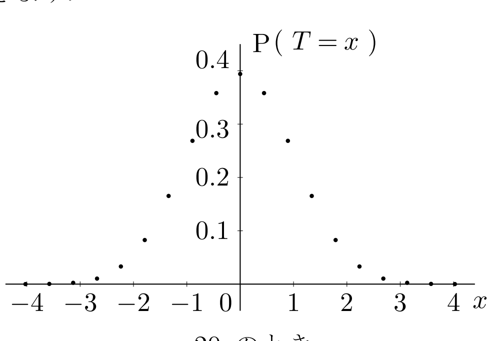
$$\mathrm{P}(\,T = -2\,) = \mathrm{P}(\,X = 0\,) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\ ,$$
$$\mathrm{P}(\,T = -1\,) = \mathrm{P}(\,X = 1\,) = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}\ ,$$
$$\mathrm{P}(\,T = 0\,) = \mathrm{P}(\,X = 2\,) = {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}\ ,$$
$$\mathrm{P}(\,T = 1\,) = \mathrm{P}(\,X = 3\,) = {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}\ ,$$
$$\mathrm{P}(\,T = 2\,) = \mathrm{P}(\,X = 4\,) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\ .$$



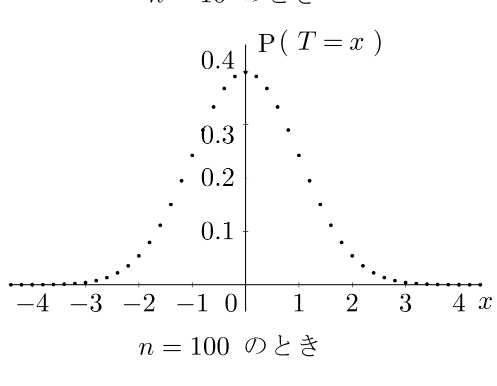
確率変数 T がとる値の確率をグラフは右上の図のようになります．　同様にして $n = 10, 20, 100, 1000$ のときのグラフを描きます．



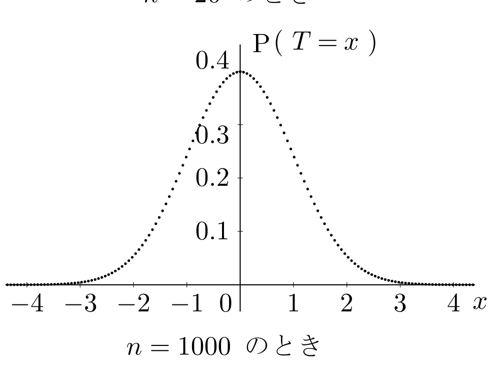
$n = 10$ のとき



$n = 20$ のとき



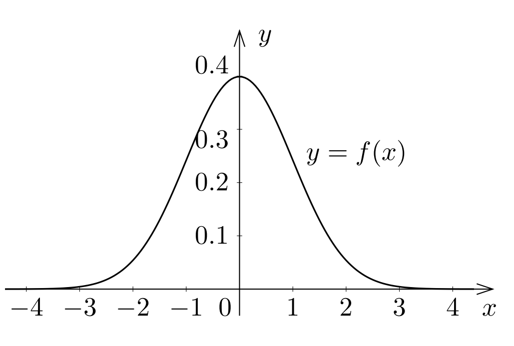
$n = 100$ のとき



$n = 1000$ のとき

　このように，n を限りなく大きくしていくと，確率変数 T の確率のグラフは右図のような曲線に限りなく近付いていきます．　証明は省きますが，この曲線をグラフとする関数 $f(x)$ は次のようになります：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\ .$$



この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする確率分布は標準正規分布といわれます．

　標準正規分布を一般化した正規分布を定義します．　次の定理の証明は後にします．

定理 3.4.1　定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx = 1\ .$$

　この定理より，定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき，変数 x の関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ は確率変数の確率密度関数です．

定義　定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする．　確率変数 X が正規分布 (normal distribution) $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとは，X の確率密度関数 $f(x)$ が次のように与えられることである：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\ .$$

　次の定理の証明は後にします．

定理 3.4.2　定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする．　正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X の平均値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ は，

$$\mathrm{E}[X] = \mu\ , \qquad \mathrm{V}[X] = \sigma^2\ .$$

　このように，定数 μ 及び正の定数 σ に対して，正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ におけるパラメータ μ は平均値で σ^2 は分散です．

　定数 μ 及び正の定数 σ に対する正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ において，$\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ とします．　このとき，正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2) = \mathrm{N}(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\ .$$

これは標準正規分布の確率密度関数です．　ですから，標準正規分布 (standard normal distribution) は平均値が 0 で標準偏差が 1 である正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ です．

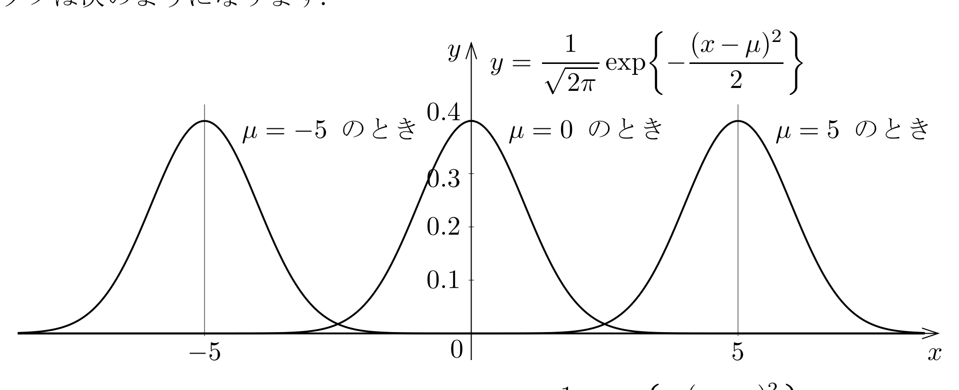
　定数 μ 及び正の定数 σ に対して，確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，X の平均値は $\mathrm{E}[X] = \mu$ で標準偏差は $\sigma[X] = \sigma$ ですから，X を標準化した確率変数 Z は

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - \mu}{\sigma}\ .$$

証明は略しますが，この標準化された確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従います．　このことは次節で重要になります．

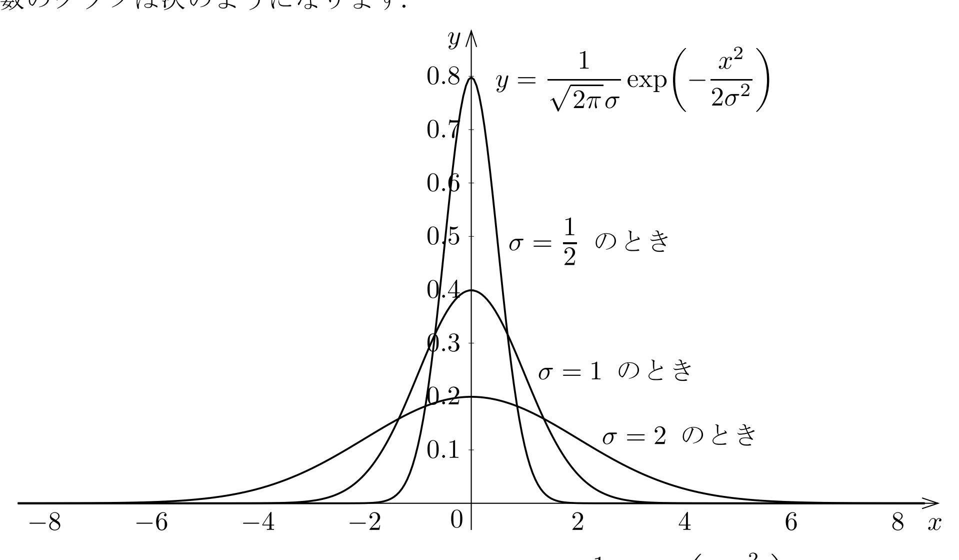
定理 3.4.3　定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする．　確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うならば，X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う．

　正規分布の確率密度関数のグラフを描きます．　実数 μ について $\mu = -5, 0, 5$ のとき，分散が 1 の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, 1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}$ のグラフは次のようになります．



正規分布 $\mathrm{N}(\mu, 1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}$ のグラフ

実数 σ について $\sigma = \frac{1}{2}, 1, 2$ のとき，平均値が 0 の正規分布 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ の確率密度関数のグラフは次のようになります．



正規分布 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ のグラフ

――――― 正規分布に関する定理の証明

　正規分布に関する定理は次の定理が元になります．

定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}\ .$$

証明　0以上の実数 u に対して $I(u)$ を次のように定める：$I(u) = \int_0^u \exp(-x^2)\,dx$ ．$\exp(-x^2) > 0$ なので $I(u) = \int_0^u \exp(-x^2)\,dx \geq 0$ ．　$I(u) = \int_0^u \exp(-y^2)\,dy$ でもあるので，

$$\begin{aligned} I(u)^2 &= \int_0^u \exp(-x^2)\,dx \int_0^u \exp(-y^2)\,dy = \int_0^u\int_0^u \exp(-x^2)\exp(-y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^u\int_0^u \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy\ . \end{aligned}$$

xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq u$ と $0 \leq y \leq u$ とで表される領域を D とおく．

$$\int_0^u\int_0^u \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy = \iint_D \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy\ .$$

従って $I(u)^2 = \iint_D \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy$ ．　xy 座標平面において，不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x^2+y^2 \leq u^2$ とで表される領域を C と，不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x^2+y^2 \leq 2u^2$ とで表される領域を E とおく．　$\exp\{-(x^2+y^2)\} > 0$ で $C \subset D \subset E$ なので，

$$\iint_C \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy \leq \iint_D \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy \leq \iint_E \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy\ .$$

xy 直交座標系における重積分 $\iint_C \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy$ を $r\theta$ 極座標系における累次積分に直すと

$$\iint_C \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^u \exp(-r^2)\,r\,dr\,d\theta\ ,$$

$t = -r^2$ とおくと，$r\,dr = -\frac{1}{2}dt$ なので，

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^u \exp(-r^2)\,r\,dr\,d\theta &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{-u^2}\exp t\,dt\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\exp t\Big]_0^{-u^2}d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\exp(-u^2)-1\}\,d\theta = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\{\exp(-u^2)-1\} \\ &= \frac{\pi}{4}\{1-\exp(-u^2)\}\ , \end{aligned}$$

よって

$$\iint_C \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\{1-\exp(-u^2)\}\ .$$

xy 直交座標系における重積分 $\iint_E \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy$ を $r\theta$ 極座標系における累次積分に直して同様に計算すると

$$\begin{aligned} \iint_E \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}u}\exp(-r^2)\,r\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{-2u^2}\exp t\,dt\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\exp t\Big]_0^{-2u^2}d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\exp(-2u^2)-1\}\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\{1-\exp(-2u^2)\}\ . \end{aligned}$$

これらのことより

$$\frac{\pi}{4}\{1-\exp(-u^2)\} \leq \iint_D \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy \leq \frac{\pi}{4}\{1-\exp(-2u^2)\}\ .$$

$\iint_D \exp\{-(x^2+y^2)\}\,dx\,dy = I(u)^2$ なので，

$$\frac{\pi}{4}\{1-\exp(-u^2)\} \leq I(u)^2 \leq \frac{\pi}{4}\{1-\exp(-2u^2)\}\ .$$

この不等式において $u \to \infty$ とする：

$$\lim_{u\to\infty}\left[\frac{\pi}{4}\{1-\exp(-u^2)\}\right] \leq \lim_{u\to\infty} I(u)^2 \leq \lim_{u\to\infty}\left[\frac{\pi}{4}\{1-\exp(-2u^2)\}\right]\ ;$$

$\lim_{u\to\pm\infty}\exp(-u^2) = 0$ ，$\lim_{u\to\pm\infty}\exp(-2u^2) = 0$ なので，

$$\lim_{u\to\infty}\left[\frac{\pi}{4}\{1-\exp(-u^2)\}\right] = \frac{\pi}{4}\left\{1-\lim_{u\to\infty}\exp(-u^2)\right\} = \frac{\pi}{4}(1-0) = \frac{\pi}{4}\ ,$$
$$\lim_{u\to\infty}\left[\frac{\pi}{4}\{1-\exp(-2u^2)\}\right] = \frac{\pi}{4}\left\{1-\lim_{u\to\infty}\exp(-2u^2)\right\} = \frac{\pi}{4}(1-0) = \frac{\pi}{4}\ ;$$

従って

$$\frac{\pi}{4} \leq \lim_{u\to\infty} I(u)^2 \leq \frac{\pi}{4}\ ,$$

よって $\lim_{u\to\infty} I(u)^2 = \frac{\pi}{4}$ ．　$I(u) \geq 0$ より $I(u) = \sqrt{I(u)^2}$ なので，

$$\lim_{u\to\infty} I(u) = \lim_{u\to\infty}\sqrt{I(u)^2} = \sqrt{\lim_{u\to\infty} I(u)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

$I(u) = \int_0^u \exp(-x^2)\,dx$ なので，

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

$x = -t$ とおく．　$dx = -dt$ ；$x = 0$ のとき $t = 0$ ，$x = -u$ のとき $t = u$ ；よって，

$$\int_{-u}^0 \exp(-x^2)\,dx = \int_u^0 \exp\{-(-t)^2\}(-dt) = -\int_u^0 \exp(-t^2)\,dt = \int_0^u \exp(-x^2)\,dx\ .$$

$v = -u$ とおく．　$v \to -\infty$ のとき $u \to \infty$ なので，

$$\lim_{v\to-\infty}\int_v^0 \exp(-x^2)\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_{-u}^0 \exp(-x^2)\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

従って

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx &= \lim_{\substack{u\to\infty \\ v\to-\infty}}\int_v^u \exp(-x^2)\,dx \\ &= \lim_{\substack{u\to\infty \\ v\to-\infty}}\left\{\int_v^0 \exp(-x^2)\,dx + \int_0^u \exp(-x^2)\right\}dx \\ &= \lim_{v\to-\infty}\int_v^0 \exp(-x^2)\,dx + \lim_{u\to\infty}\int_0^u \exp(-x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}\ . \end{aligned}$$

（証明終り）

定理 3.4.1.　定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx = 1\ .$$

証明　$y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ とおく．　$x = \sqrt{2}\sigma y + \mu$ ．　$dx = \sqrt{2}\sigma\,dy$ ．　$x = u$ のとき $y = \frac{u-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ ，$x = v$ のとき $y = \frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ ．　よって

$$\begin{aligned} \int_u^v \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx &= \int_{\frac{u-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp\left[-\frac{\{(\sqrt{2}\sigma y+\mu)-\mu\}^2}{2\sigma^2}\right]\sqrt{2}\sigma\,dy \\ &= \sqrt{2}\sigma\int_{\frac{u-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp\left\{-\frac{(\sqrt{2}\sigma y)^2}{2\sigma^2}\right\}dy \\ &= \sqrt{2}\sigma\int_{\frac{u-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp(-y^2)\,dy\ . \end{aligned}$$

$\sigma > 0$ なので，$u \to -\infty$ のとき $\frac{u-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \to -\infty$ ，$v \to \infty$ のとき $\frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \to \infty$ ．　前述の定理 $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}$ より，

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\int_u^v \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx &= \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\left\{\sqrt{2}\sigma\int_{\frac{u-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp(-y^2)\,dy\right\} \\ &= \sqrt{2}\sigma\lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\int_{\frac{u-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{v-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}\exp(-y^2)\,dy \\ &= \sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)\,dy = \sqrt{2}\sigma\sqrt{\pi} \\ &= \sqrt{2\pi}\,\sigma\ . \end{aligned}$$

故に，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx &= \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\int_u^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\int_u^v \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\sqrt{2\pi}\,\sigma \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

補助定理　標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う確率変数 Z について $\mathrm{E}[Z] = 0$ ，$\mathrm{V}[Z] = 1$ ．

証明　確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従うとする．

　Z の平均値 $\mathrm{E}[Z]$ を求める．　$y = -x$ とおく．　$x = -y$ ．　$dx = -dy$ ．

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx &= \lim_{u\to-\infty}\int_u^0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= \lim_{u\to-\infty}\int_{-u}^0 (-y)\exp\left\{-\frac{(-y)^2}{2}\right\}(-dy) \\ &= \lim_{u\to-\infty}\int_{-u}^0 y\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \\ &= \lim_{u\to-\infty}\int_{-u}^0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\ . \end{aligned}$$

$v = -u$ とおくと，$u \to -\infty$ のとき $v \to \infty$ なので，

$$\begin{aligned} \lim_{u\to-\infty}\int_{-u}^0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx &= \lim_{v\to\infty}\int_v^0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_{\infty}^0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= -\int_0^{\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\ . \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx &= \int_{-\infty}^0 x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_0^{\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= -\int_0^{\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_0^{\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

故に

$$\mathrm{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 0\ .$$

　次に Z の分散 $\mathrm{V}[Z]$ を求める．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right\} &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x\cdot(-x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\ , \end{aligned}$$

よって，

$$\int_u^v\left\{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right\}dx = \left[x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^v\ ,$$
$$\int_u^v \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx - \int_u^v x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^v\ ,$$
$$\int_u^v x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^v + \int_u^v \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\ .$$

従って，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx &= \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\int_u^v x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\left\{\left[x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^v + \int_u^v \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right\}\ . \end{aligned}$$

ロピタルの定理を用いると，

$$\lim_{u\to-\infty}\left\{u\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right\} = \lim_{u\to-\infty}\frac{u}{\exp\frac{u^2}{2}} = \lim_{u\to-\infty}\frac{\frac{d}{du}u}{\frac{d}{du}\exp\frac{u^2}{2}} = \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{u\exp\frac{u^2}{2}}$$
$$= 0\ ;$$

$$\lim_{v\to\infty}\left\{v\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\right\} = \lim_{v\to\infty}\frac{v}{\exp\frac{v^2}{2}} = \lim_{v\to\infty}\frac{\frac{d}{dv}v}{\frac{d}{dv}\exp\frac{v^2}{2}} = \lim_{v\to\infty}\frac{1}{v\exp\frac{v^2}{2}}$$
$$= 0\ .$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\left[x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^v &= \lim_{v\to\infty}\left\{v\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\right\} - \lim_{u\to-\infty}\left\{u\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right\} \\ &= 0 - 0 = 0\ . \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx &= \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\left\{\left[x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^v + \int_u^v \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right\} \\ &= \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\left[x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^v + \lim_{\substack{v\to\infty \\ u\to-\infty}}\int_u^v \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\ . \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Z^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\ . \end{aligned}$$

関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ は標準正規分布に従う確率変数の確率密度関数なので，

$$\mathrm{E}[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 1\ .$$

$\mathrm{E}[Z] = 0$ なので，

$$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{E}[Z^2] - \{\mathrm{E}[Z]\}^2 = 1\ .$$

（証明終り）

　定理3.4.2より先に定理3.4.3を証明します．

定理 3.4.3　定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする．　確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うならば，確率変数 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う．

証明　確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．　X の確率密度関数 $f(x)$ は次のように与えられる：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\ .$$

定理2.4.4より，確率変数 $X - \mu$ の確率密度関数 g は次のように与えられる：

$$g(x) = f(x+\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\ .$$

更に，定理2.4.5より，確率変数 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ の確率密度関数 h は次のように与えられる：

$$h(x) = \sigma\,g(\sigma x) = \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(\sigma x)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\ .$$

これは標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ の確率密度関数である．　従って，確率変数 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布に従う．　（証明終り）

定理 3.4.2　定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする．　正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X について $\mathrm{E}[X] = \mu$ ，$\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ ．

証明　確率変数 X が標準正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．　定理3.4.3より確率変数 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従うので，補助定理より，

$$\mathrm{E}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = 0\ , \qquad \mathrm{V}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = 1\ .$$

定理2.3.2と2.3.1とより，

$$\mathrm{E}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{\mathrm{E}[X-\mu]}{\sigma} = \frac{\mathrm{E}[X]-\mu}{\sigma}\ .$$

従って $\frac{\mathrm{E}[X]-\mu}{\sigma} = 0$ なので，$\mathrm{E}[X] = \mu$ ．　また，定理2.4.3と2.4.2とより，

$$\mathrm{V}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\{\mathrm{V}[X-\mu]\} = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}[X]\ .$$

従って $\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}[X] = 1$ なので，$\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ ．　（証明終り）