§4.1　2次元の確率変数

例えば，ある工場で生産されるある製品を何個か取り出してその製品の重量を測るとします．この工場で生産されるこの製品の重量がどのように分布するか定まっていて，かつ，製品の取り出し方が決まっているとします．このときこの工場で生産されるこの製品の1個の重量を表わす変数 X を確率変数と考えることができます．この製品を順番に2個取り出してそれらの製品の重量を測るとします．1番めの製品の重量を表す変数を X_1 とおき，2番めの製品の重量を表す変数を X_2 とおくとき，確率変数 X_1 と X_2 との順序対 (X_1, X_2) を2次元の確率変数といいます．

このように，2次元の確率変数とは2個の確率変数の順序対のことです．但し，数学的には以下のようにやや条件が付きます．

定義　変数 X と Y との対 (X, Y) が2次元の確率変数であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 a と b とに対して，“ $X \leq a$ かつ $Y \leq b$ ” となる確率が定まる．

2次元の確率変数 (X, Y) 及び実数 a, b に対して，例えば，

$X \leq a$ かつ $Y \leq b$ となる確率を $\mathrm{P}(X \leq a, Y \leq b)$ と，

$X \geq a$ かつ $Y \geq b$ となる確率を $\mathrm{P}(X \geq a, Y \geq b)$ と，

いうように書き表します．

確率変数 X と Y とが**互いに独立** (mutually independent) であるとは，直感的にいうと，X の値（の範囲）が分かっても Y の値の確率に影響しないし，Y の値（の範囲）が分かっても X の値の確率に影響しない，ということです．正確には以下のように定義します．

定義　確率変数 X と Y とが互いに独立であるとは次の条件を満たすことである：X と Y との対 (X, Y) が2次元の確率変数であり，任意の実数 a と b とについて

$$\mathrm{P}(X \leq a, Y \leq b) = \mathrm{P}(X \leq a)\,\mathrm{P}(Y \leq b)\ .$$

以下の定理が成り立ちます（証明は省きます）．

定理 4.1.1　2次元の確率変数 (X, Y) 及び定数 a, b に対して，$Z = aX + bY$ となる変数 Z は（1次元の）確率変数であり，

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[aX + bY] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y]\ ;$$

更に，確率変数 X と Y とが互いに独立であるとき，

$$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{V}[aX + bY] = a^2\mathrm{V}[X] + b^2\mathrm{V}[Y]\ .$$

例として，離散型確率変数 X 及び Y がとり得る値は $1, 2, 3$ であり，

$$\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(X=2) = \mathrm{P}(X=3) = \frac{1}{3}\ ,$$
$$\mathrm{P}(Y=1) = \mathrm{P}(Y=2) = \mathrm{P}(Y=3) = \frac{1}{3}$$

とします．加えて X と Y とは独立であるとします．確率変数 $Z = X + Y$ がとり得る値は $2, 3, 4, 5, 6$ であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=2) &= \mathrm{P}(X=1, Y=1) = \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{9}\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=3) &= \mathrm{P}(X=1, Y=2) + \mathrm{P}(X=2, Y=1)\\ &= \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=2) + \mathrm{P}(X=2)\,\mathrm{P}(Y=1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{2}{9}\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=4) &= \mathrm{P}(X=1, Y=3) + \mathrm{P}(X=2, Y=2) + \mathrm{P}(X=3, Y=1)\\ &= \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=3) + \mathrm{P}(X=2)\,\mathrm{P}(Y=2) + \mathrm{P}(X=3)\,\mathrm{P}(Y=1)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=5) &= \mathrm{P}(X=2, Y=3) + \mathrm{P}(X=3, Y=2)\\ &= \mathrm{P}(X=2)\,\mathrm{P}(Y=3) + \mathrm{P}(X=3)\,\mathrm{P}(Y=2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{2}{9}\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=6) &= \mathrm{P}(X=3, Y=3) = \mathrm{P}(X=3)\,\mathrm{P}(Y=3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{9}\ .\end{aligned}$$

このように，$Z = X + Y$ の確率分布は元の確率変数 X や Y の確率分布とは異なります．

2次元の確率変数 (X, Y) 及び定数 a, b に対して，上の定理で述べたように，$aX + bY$ は（1次元の）確率変数です．但し，確率変数 X と Y とが同じ種類の分布に従うときでも，確率変数 $aX + bY$ がまたその種類の分布に従うとは限りません．例えば，確率変数 X と Y とが一様分布に従っても，確率変数 $aX + bY$ は大抵は一様分布に従いません．しかし，正規分布については特に次の定理が成り立ちます（証明は省きます）．

定理 4.1.2　定数 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ は実数で $\sigma_1 \geq 0$ ，$\sigma_2 \geq 0$ とする．確率変数 X が正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1{}^2)$ に従い，確率変数 Y が正規分布 $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2{}^2)$ に従い，X と Y とが互いに独立であるとき，任意の定数 a, b に対して，確率変数 $aX + bY$ は正規分布 $\mathrm{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1{}^2 + b^2\sigma_2{}^2)$ に従う．

例題 4.1　確率変数 X は正規分布 $\mathrm{N}(50, 70)$ に従い，確率変数 Y は正規分布 $\mathrm{N}(60, 90)$ に従い，X と Y とは互いに独立であるとする．確率 $\mathrm{P}(3X \leq 2Y + 20)$ を求める．

$$3X \leq 2Y + 20 \iff 3X - 2Y \leq 20\ .$$

また，

$$\mathrm{E}[3X - 2Y] = 3\mathrm{E}[X] - 2\mathrm{E}[Y] = 3\cdot 50 - 2\cdot 60 = 30\ .$$

X と Y とは独立なので，

$$\mathrm{V}[3X - 2Y] = \mathrm{V}[3X + (-2)Y] = 3^2\mathrm{V}[X] + (-2)^2\mathrm{V}[Y] = 9\cdot 70 + 4\cdot 90 = 990\ .$$

よって，$3X - 2Y$ は正規分布 $\mathrm{N}(30, 990)$ に従う．よって，$3X - 2Y$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{3X - 2Y - 30}{\sqrt{990}}$$

は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う．標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$\begin{aligned}3X \leq 2Y + 20 &\iff 3X - 2Y \leq 20 \iff \frac{3X - 2Y - 30}{\sqrt{990}} \leq \frac{20 - 30}{\sqrt{990}}\\ &\iff Z \leq -\frac{10}{\sqrt{990}}\ ;\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3X \leq 2Y + 20) &= \mathrm{P}\left(Z \leq -\frac{10}{\sqrt{990}}\right) = \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{990}}\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{990}}\right) \fallingdotseq 1 - \Phi(0.318) \fallingdotseq 1 - 0.625\\ &= 0.375\ .\end{aligned}$$

終

問題 4.1　確率変数 X は正規分布 $\mathrm{N}(40, 64)$ に従い，確率変数 Y は正規分布 $\mathrm{N}(70, 100)$ に従い，X と Y とは互いに独立であるとします．確率 $\mathrm{P}(5X \geq 3Y + 20)$ を求めなさい．