## §5.4　2項母集団

母集団に属す各々の事物について，ある性質を持つか持たないか，二つのうちのどちらであるとします．この母集団の中でこの性質を持つものの割合を**母比率**といい，母比率に興味があるとき母集団を**2項母集団**といいます．例えば，選挙権の有権者の全体の中で内閣を支持する人の割合に興味があるとき，有権者の全体が2項母集団であり，その中で内閣を支持する人の割合が母比率です．

2項母集団の母比率を標本調査するとき，標本の中でその性質を持つ事物の占める割合を**標本比率**といいます．

ある集合の各々の要素について，ある性質 A を持つか持たないかのどちらかであるとします．例えば，集合の大きさ（要素の個数）が 5 で，性質 A を持つ要素の個数が 3 であるとき，性質 A を持つ要素の比率は $\dfrac{3}{5}$ です．性質 A を持つ要素の属性値は 1 とし，性質 A を持たない要素の属性値は 0 とします．このとき，属性値の平均は

$$\frac{1+1+1+0+0}{5}=\frac{3}{5}\ .$$

つまり比率と平均とは同じです．

2項母集団に属す各々の事物について，着目する性質を持つときその属性値は 1 とし，持たないとき属性値は 0 とします．このとき，母比率と母平均とは同じです．また，抽出された標本の標本比率と標本平均とは同じです．

2項母集団の大きさを $N$ とおき母比率を $\rho$ とおきます．母集団の要素のうち，属性値が 1 である要素の個数は $N\rho$ で，属性値が 0 である要素の個数は $N(1-\rho)$ です．属性値の合計は $1\cdot N\rho+0\cdot N(1-\rho)=N\rho$ ですから，母平均は $\dfrac{N\rho}{N}=\rho$ です．更に母分散は

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\{(1-\rho)^2\cdot N\rho+(0-\rho)^2\cdot N(1-\rho)\}&=(1-\rho)^2\rho+(0-\rho)^2(1-\rho)\\&=(1-\rho)\{(1-\rho)\rho+\rho^2\}\\&=\rho(1-\rho)\ .\end{aligned}$$

こうして次の定理が示されました．

**定理**　母比率が $\rho$ である2項母集団の母均は $\rho$ であり母分散は $\rho(1-\rho)$ である．

中心極限定理から導かれた定理5.3を思い起こして下さい．

> 母平均が $\mu$ であり母標準偏差が $\sigma$ である無限母集団から無作為抽出された標本の標本平均を表す確率変数は，標本の大きさ $n$ が充分大きい大きいとき，近似的に正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．

母比率が $\rho$ である無限2項母集団の母平均は $\rho$ で母分散は $\rho(1-\rho)$ です．この母集団から無作為抽出された標本の標本比率すなわち標本平均を表す確率変数は，標本の大きさ $n$ が充分大きい大きいとき，定理5.3より，近似的に正規分布 $\mathrm{N}\left(\rho,\dfrac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従います．

**定理** 5.4　母比率が $\rho$ である無限2項母集団から無作為抽出された標本の標本比率を表す確率変数は，標本の大きさ $n$ が充分大きいとき，近似的に正規分布 $\mathrm{N}\left(\rho,\dfrac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う．

$\boxed{\text{例題 5.4}}$　母平比率が 0.3 である無限2項母集団から無作為に非復元抽出された大きさ 200 の標本の標本比率を表す確率変数 $R$ について，確率 $\mathrm{P}(\,R\leq 2.5\,)$ を近似的に求める．

標本比率を表す確率変数 $R$ は近似的に正規分布

$$\mathrm{N}\left(0.3,\frac{0.3\cdot 0.7}{200}\right)=\mathrm{N}\left(0.3,\frac{21}{20000}\right)$$

に従うので，$R$ を標準化した確率変数

$$Z=\frac{R-0.3}{\sqrt{\dfrac{21}{20000}}}=\sqrt{\frac{20000}{21}}(R-0.3)$$

は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\,R\leq 0.25\,)&=\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{20000}{21}}(R-0.3)\leq\sqrt{\frac{20000}{21}}(0.25-0.3)\right)\\&\fallingdotseq \mathrm{P}(\,Z\leq -1.54\,)=\Phi(-1.54)=1-\Phi(1.54)\fallingdotseq 1-0.9382\\&\fallingdotseq 0.0618\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.4}}$　母平比率が 0.6 である無限2項母集団から無作為に非復元抽出された大きさ 300 の標本の標本比率を表す確率変数 $R$ について，確率 $\mathrm{P}(\,R\geq 0.55\,)$ を近似的に求めなさい．