

§6.2 母平均の点推定

定理 6.2 母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本の標本確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

は母平均の不偏推定量である。

証明 母平均を μ とおく。

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_n] = \mu,$$

従って定理 4.2.2 より $E[\bar{X}] = \mu$ なので、統計量 \bar{X} は母平均 μ の不偏推定量である。
(証明終り)

例として、母平均が μ であり母標準偏差が σ である母集団から無作為抽出された大きさ 2 の標本の標本確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、共に母集団分布に従うものとします。 $\sigma > 0$ とします。

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu, \quad V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2 > 0.$$

統計量 T_1 と T_2 とを次のように定めます：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}.$$

上述の定理より T_1 は母平均 μ の不偏推定量です。また、

$$E[T_2] = E\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = \frac{2E[X_1] + E[X_2]}{3} = \frac{2\mu + \mu}{3} = \mu.$$

従って、統計量 T_2 も母平均 μ の不偏推定量です。このように、 T_1 も T_2 も母平均の不偏推定量ですから、不偏性という観点だけでは母平均の推定量としてどちらの方が望ましいともいえません。

統計量 T_1, T_2 の分散を計算します。標本確率変数 X_1 と X_2 とは互いに独立なので、 T_1 の分散は、

$$\begin{aligned} V[T_1] &= V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{4}V[X_1] + \frac{1}{4}V[X_2] = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

T_2 の分散は、

$$\begin{aligned} V[T_2] &= V\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = V\left[\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right] = \frac{4}{9}V[X_1] + \frac{1}{9}V[X_2] = \frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 \\ &= \frac{5}{9}\sigma^2. \end{aligned}$$

このように $V[T_1] < V[T_2]$ ですから、推定量 T_1 は推定量 T_2 より有効です。従って、有効性の観点から、母平均の推定量として T_2 より T_1 の方が望ましいことになります。

問題 6.2 無限母集団から大きさ 2 の標本を無作為に抽出するときの標本確率変数を X_1, X_2 とおきます。母平均を μ と、母標準偏差を σ とおきます。 $\sigma > 0$ とします。統計量 T_1 と T_2 とを次のように定めます：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5}.$$

統計量 T_2 は母平均 μ の不偏推定量であることを示しなさい。また、母平均 μ の推定量として、統計量 T_1 と統計量 T_2 とのどちらが有効であるかを調べなさい。

標本確率変数の平均は母平均の一致推定量です。

定理 無限母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本の標本確率変数を $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ とおくとき、標本平均を表す統計量

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

は母平均の一致推定量である。

証明 母標準偏差を σ とおく。標本確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ は互いに独立であり、

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \dots = V[X_n] = \sigma^2.$$

従って、定理 3.3 より、

$$V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

これより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V[\bar{X}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

故に定理 6.1 より標本平均を表す統計量 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ は母平均の一致推定量である。
(証明終り)