§8.4　大標本による母平均の差の検定

無限母集団 A の母平均を μ_{A} とおき，A の母標準偏差 σ_{A} とおきます．無限母集団 B の母平均を μ_{B} とおき，B の母標準偏差 σ_{B} とおきます． A から無作為抽出された標本の大きさ n_{A} が充分大きく，B から無作為抽出された標本の大きさ n_{B} も充分大きいとします． A の標本の平均を表わす確率変数を $\overline{X}_{\mathrm{A}}$ とおき，B の標本の平均を表わす確率変数を $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ とおきます． $\overline{X}_{\mathrm{A}}$ と $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ とは互いに独立であるとします． 中心極限定理から導かれた定理 5.3 より，確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{A}}$ は正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{A}},\dfrac{\sigma_{\mathrm{A}}^2}{n_{\mathrm{A}}}\right)$ に従い，確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ は正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{B}},\dfrac{\sigma_{\mathrm{B}}^2}{n_{\mathrm{B}}}\right)$ に従います． よって，

$$\mathrm{E}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\mathrm{E}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}\right]-\mathrm{E}\left[\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}}\ ,$$
$$\mathrm{V}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\mathrm{V}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}\right]+\mathrm{V}\left[\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\frac{\sigma_{\mathrm{A}}^2}{n_{\mathrm{A}}}+\frac{\sigma_{\mathrm{B}}^2}{n_{\mathrm{B}}}\ ,$$

定理 4.2 より，確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}$ は正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}},\dfrac{\sigma_{\mathrm{A}}^2}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{\sigma_{\mathrm{B}}^2}{n_{\mathrm{B}}}\right)$ に従います．

標本調査では母集団 A の母分散 ${\sigma_{\mathrm{A}}}^2$ 及び母集団 B の母分散 ${\sigma_{\mathrm{B}}}^2$ の値は普通は分かりません． ここでは標本の大きさ n が充分に大きい場合を考えているので，標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて差し支えありません． そこで，普通は，母集団 A の母分散 σ_{A}^2 を標本の不偏分散 u_{A} で近似して，母集団 B の母分散 σ_{B}^2 を標本の不偏分散 u_{B} で近似します． 確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}$ は近似的に正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}},\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}\right)$ に従いますから，確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}$ を標準化した確率変数

$$Z=\frac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}$$

は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従います． この確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおきます：

$$\Phi(x)=\mathrm{P}(\,Z\leq x\,)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\ .$$

各実数 a について，

$$\mathrm{P}(\,Z\leq a\,)=\Phi(a)\ ,$$
$$\mathrm{P}(\,Z\geq a\,)=1-\mathrm{P}(\,Z\leq a\,)=1-\Phi(a)\ ,$$
$$\Phi(-a)=1-\Phi(a)\ .$$

仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\neq\mu_{\mathrm{B}}$ 或いは仮説 $\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ を検討する． 近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う確率変数 $Z=\dfrac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}$ に対して，検定統計量 T を

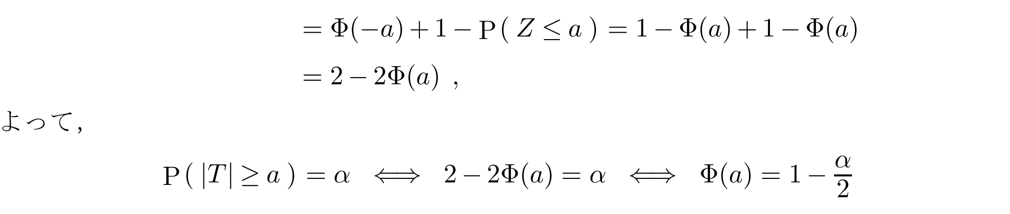
$$T=\frac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}$$

と定めます． 0 に近い正の実数 α を有意水準とします．

仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\neq\mu_{\mathrm{B}}$ を検討します． 帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$ を立てます． $-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}=0$ なので，

$$Z=\frac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}=\frac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}=T\ .$$

よって検定統計量 T は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従います．



検定統計量 T の実現値が 0 から離れるほど帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$ は疑わしくなります． そこで，T の実現値と 0 との間の間隔，つまり T の実現値の絶対値が，ある基準値以上のとき帰無仮説を棄却します． その基準値を考えます． 帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$ より $T=Z$ なので，正の各実数 a について，

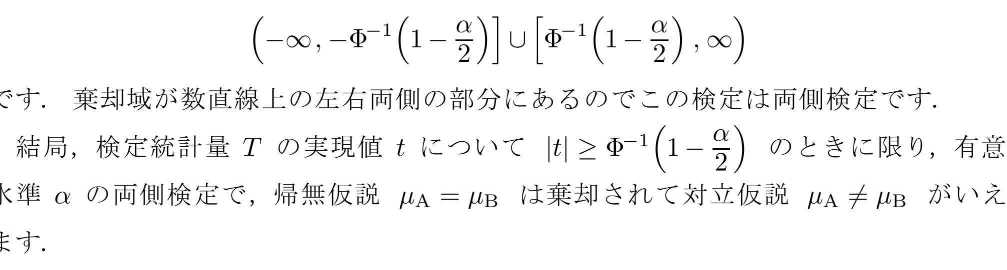
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\,|T|\geq a\,)&=\mathrm{P}(\,|Z|\geq a\,)=\mathrm{P}(\,Z\leq -a\,)+\mathrm{P}(\,Z\geq a\,)\\&=\Phi(-a)+1-\mathrm{P}(\,Z\leq a\,)=1-\Phi(a)+1-\Phi(a)\\&=2-2\Phi(a)\ ,\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{P}(\,|T|\geq a\,)=\alpha\iff 2-2\Phi(a)=\alpha\iff \Phi(a)=1-\frac{\alpha}{2}$$
$$\iff a=\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ .$$

これより

$$\mathrm{P}\left(\ |T|\geq\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ \right)=\alpha\ .$$



検定統計量 T の実現値 t について， $|t|\geq\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ のときに限り，つまり $t\leq-\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ または $t\geq\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します． 棄却域は区間の合併

$$\left(-\infty,-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cup\left[\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\infty\right)$$

です． 棄却域が数直線上の左右両側の部分にあるのでこの検定は両側検定です．

結局，検定統計量 T の実現値 t について $|t|\geq\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ のときに限り，有意水準 α の両側検定で，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$ は棄却されて対立仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\neq\mu_{\mathrm{B}}$ がいえます．

仮説 $\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ を検討します． 帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ を立てます． $-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\geq 0$ なので，

$$Z=\frac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}\geq\frac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}=T\ .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので， $\mathrm{E}[T]\leq\mathrm{E}[Z]=0$ ． T の実現値の分布の中心は 0 以下なので，T の実現値が 0 より大分大きいとき帰無仮説は疑わしいといえます． そこで，T の実現値がある正の基準値以上のとき帰無仮説を棄却します． その基準値を考えます． 帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ より $Z\geq T$ なので，各実数 a について， $T\geq a$ ならば $Z\geq a$ ，よって

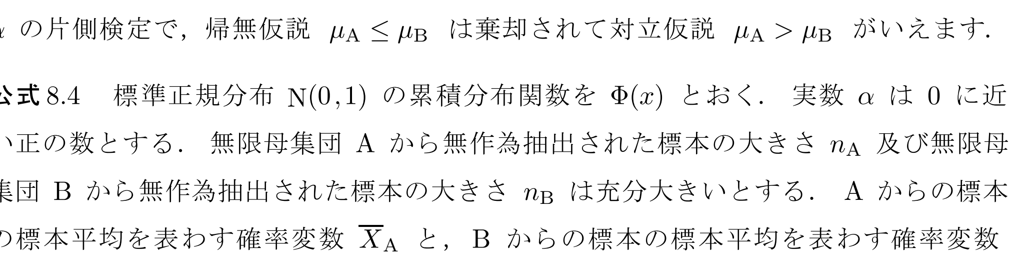
$$\mathrm{P}(\,T\geq a\,)\leq\mathrm{P}(\,Z\geq a\,)\ ,$$

$\mathrm{P}(\,Z\geq a\,)=1-\mathrm{P}(\,Z\leq a\,)=1-\Phi(a)$ なので，

$$\mathrm{P}(\,Z\geq a\,)=\alpha\iff 1-\Phi(a)=\alpha\iff\Phi(a)=1-\alpha$$
$$\iff a=\Phi^{-1}(1-\alpha)\ .$$

これより

$$\mathrm{P}\left(\,T\geq\Phi^{-1}(1-\alpha)\,\right)\leq\alpha\ .$$



検定統計量 T の実現値 t について $t\geq\Phi^{-1}(1-\alpha)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します． 棄却域は区間 $[\Phi^{-1}(1-\alpha),\infty)$ です． 棄却域が数直線上の片側の部分にあるのでこの検定は片側検定です．

結局，検定統計量 T の実現値 t について $t\geq\Phi^{-1}(1-\alpha)$ のときに限り，有意水準 α の片側検定で，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ は棄却されて対立仮説 $\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ がいえます．

公式 8.4　標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく． 実数 α は 0 に近い正の数とする． 無限母集団 A から無作為抽出された標本の大きさ n_{A} 及び無限母集団 B から無作為抽出された標本の大きさ n_{B} は充分大きいとする． A からの標本の標本平均を表わす確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{A}}$ と，B からの標本の標本平均を表わす確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ とは互いに独立であるとする． A の母平均 μ_{A} 及び B の母平均 μ_{B} について，仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\neq\mu_{\mathrm{B}}$ 或いは $\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ を検討するとき，A からの標本の不偏分散を u_{A} とおき，B からの標本の不偏分散を u_{B} とおき，検定統計量 T を $T=\dfrac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{u_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}}+\dfrac{u_{\mathrm{B}}}{n_{\mathrm{B}}}}}$ と定めると次のようになる．

(1) 検定統計量 T の実現値 t について $|t|\geq\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ のとき，有意水準 α の両側検定で，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$ は棄却されて対立仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\neq\mu_{\mathrm{B}}$ がいえる．

(2) 検定統計量 T の実現値 t について $t\geq\Phi^{-1}(1-\alpha)$ のとき，有意水準 α の片側検定で，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ は棄却されて対立仮説 $\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ がいえる．

$\boxed{\text{例題 8.4}}$　ある工場ではある部品に A 社と B 社とから仕入れている． A 社製部品から無作為抽出された標本と B 社製部品から無作為抽出された標本とについて重量を調べると次のようになった．

	調べた個数	重量の平均	重量の不偏分散
A 社製部品	90	85.7 g	$1.2\,\mathrm{g}^2$
B 社製部品	80	85.3 g	$1.6\,\mathrm{g}^2$

平均すると A 社製部品は B 社製部品より重いといえるかどうか，有意水準 5% で検定する． A 社製部品の全体及び B 社製部品の全体の各々を無限母集団とする． 標本は充分大きいので，標本の不偏分散を母分散として代用する．

標本は充分大きいので，A 社製部品から無作為抽出された標本の不偏分散 $1.2\,\mathrm{g}^2$ を A 社製部品の全体の母分散とみなし，B 社製部品から無作為抽出された標本の不偏分散 $1.6\,\mathrm{g}^2$ を B 社製部品の全体の母分散とみなす． A 社製部品の全体の重量（単位は g）の平均を μ_{A} とおき，A 社製部品から無作為抽出された大きさ 90 の標本の重量（単位は g）の平均を表す確率変数を $\overline{X}_{\mathrm{A}}$ とおく． B 社製部品の全体の重量（単位は g）の平均を μ_{B} とおき，B 社製部品から無作為抽出された大きさ 80 の標本の重量（単位は g）の平均を表す確率変数を $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ とおく． 中心極限定理より，$\overline{X}_{\mathrm{A}}$ は正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{A}},\dfrac{1.6}{80}\right)=\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{A}},\dfrac{1}{50}\right)$ に近似的に従い， $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ は正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{A}},\dfrac{1.2}{90}\right)=\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{B}},\dfrac{1}{75}\right)$ に近似的に従うので，

$$\mathrm{E}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\mathrm{E}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}\right]-\mathrm{E}\left[\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}}\ ,$$
$$\mathrm{V}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\mathrm{V}\left[\overline{X}_{\mathrm{A}}\right]+\mathrm{V}\left[\overline{X}_{\mathrm{B}}\right]=\frac{1}{50}+\frac{1}{75}=\frac{1}{30}\ ,$$

よって確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}$ は正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}},\dfrac{1}{30}\right)$ に従うので，$\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}$ を標準化した確率変数

$$Z=\frac{\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\dfrac{1}{30}}}=\sqrt{30}\left(\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\right)$$

は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う．

$\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ について検討するので，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ を立てる． 検定統計量 T を次のように定める：

$$T=\sqrt{30}\left(\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}\right)\ .$$

帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ より， $-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\geq 0$ なので

$$Z=\sqrt{30}\left(\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\right)\geq\sqrt{30}\left(\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}\right)=T\ .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので $\mathrm{E}[T]\leq\mathrm{E}[Z]=0$ ． よって，検定統計量 T の実現値が 0 より大いほど帰無仮説は疑わしいので，右側検定を行う． 確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従うので，

$$\mathrm{P}(\,Z\geq 1.645\,)=5\%\ .$$

帰無仮説より $Z\geq T$ なので， $T\geq 1.645$ ならば $Z\geq 1.645$ ，よって，

$$\mathrm{P}(\,T\geq 1.645\,)\leq\mathrm{P}(\,Z\geq 1.645\,)=5\%\ .$$

従って，検定統計量 T の実現値 t について $t\geq 1.645$ のとき，有意水準 5% の右側検定で，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{A}}\leq\mu_{\mathrm{B}}$ は棄却されるので，対立仮説 $\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ がいえる．

いま，確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{A}}$ の実現値は 85.4 で，確率変数 $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ の実現値は 85.7 なので，検定統計量 $T=\sqrt{30}\left(\overline{X}_{\mathrm{A}}-\overline{X}_{\mathrm{B}}\right)$ の実現値 t は

$$t=\sqrt{30}(85.7-85.4)=\sqrt{30}\cdot 0.3\fallingdotseq 1.643\ .$$

$t\ngeq 1.645$ なので，帰無仮説 $\mu_{\mathrm{B}}\leq\mu_{\mathrm{A}}$ は棄却できない． つまり，有意水準 5% の片側検定では，A 社製の部品の重量の平均は B 社製の部品の重量の平均より重いとはいえない． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.4}}$　ある製造会社ではある製品を A 工場と B 工場との異なる 2 つの工場で製造しています． A 工場で製造された製品の中から無作為抽出した標本及び B 工場で製造された製品の中から無作為抽出した標本の各々の製品の重量を調べて各々の標本の平均と不偏分散とを算出しました．

	調べた個数	重量の平均	重量の不偏分散
A 工場の製品	180	93.5 g	$0.8\,\mathrm{g}^2$
B 工場の製品	240	93.7 g	$0.6\,\mathrm{g}^2$

B 工場の製品の全体の重量の平均は A 工場の製品の全体の重量の平均より重いといえるかどうか，有意水準 1% で検定しなさい． A, B 各工場の製品全体の各々を無限母集団としなさい． 標本は充分大きいので，標本の不偏分散を母分散として代用しなさい．