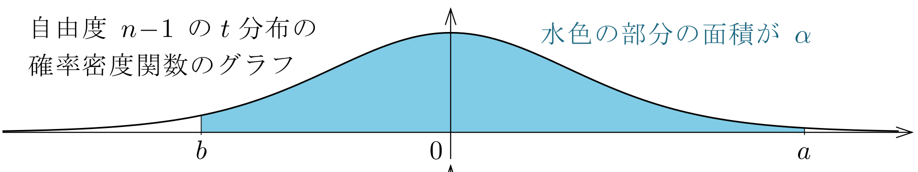
§9.3　正規母集団の母平均の区間推定

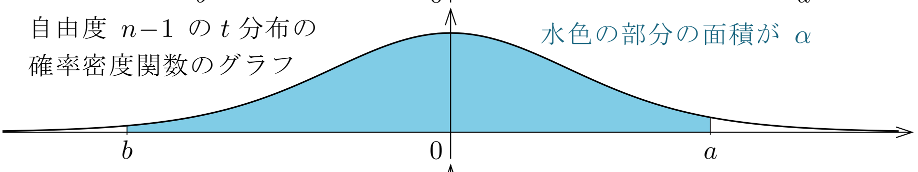
小標本のときつまり標本が大きくないときにも適用できる母平均の区間推定について述べます．但し，以下の方法が適用できるのは母集団が正規母集団であるときに限ります．

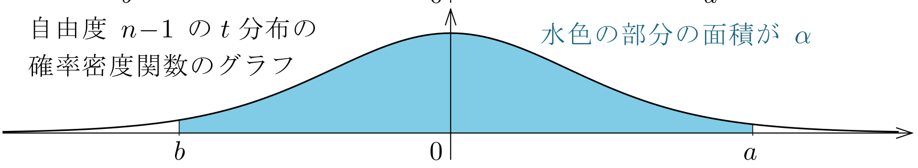
正規母集団の母平均を μ とおきます（母平均 μ の値は分かりません）．実数 α について $0<\alpha<1$ とします．母平均 μ の信頼度 α の信頼区間を考えます．正規母集団から無作為抽出された大きさ n （$n\geq 2$）の正規標本の，平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき，不偏分散を表す確率変数を U とおきます．定理9.2.5より，確率変数 $\sqrt{\dfrac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従います．このことを元に，信頼度 α に対して次のような実数 a,b を考えます：

$$\mathrm{P}\left(b\leq \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\leq a \right)=\alpha\ .$$

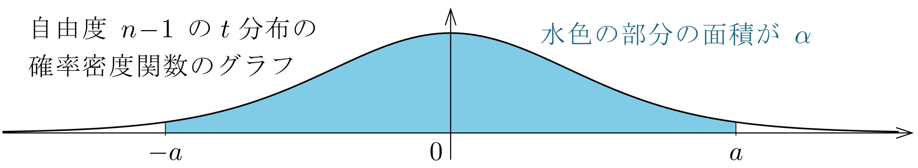
自由度 $n-1$ の t 分布の確率密度関数のグラフを考えると次の図のようになります．







信頼区間をなるべく狭くするために，$\mathrm{P}\left(b\leq \sqrt{\dfrac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\leq a \right)=\alpha$ である実数 a と b との間隔 $a-b$ をなるべく小さくします．t 分布の確率密度関数は偶関数なので，$b=-a$ とします．



$\mathrm{P}\left(-a\leq \sqrt{\dfrac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\leq a \right)=\alpha$ である実数 a を求めます．

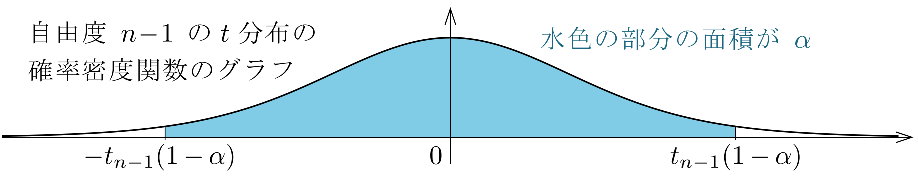
$$-a\leq \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\leq a \iff \left|\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\leq a\ ,$$

確率変数 $\sqrt{\dfrac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従うので，定理9.2.7より，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(-a\leq \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\leq a \right)=\alpha &\iff \mathrm{P}\left(\left|\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right|\leq a \right)=\alpha \\ &\iff a=t_{n-1}(1-\alpha)\ .\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{P}\left(-t_{n-1}(1-\alpha)\leq \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\leq t_{n-1}(1-\alpha) \right)=\alpha\ .$$



ここで，

$$\begin{aligned}&-t_{n-1}(1-\alpha)\leq \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\leq t_{n-1}(1-\alpha)\\ \iff& -\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\leq \overline{X}-\mu\leq \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\\ \iff& \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\geq \mu-\overline{X}\geq -\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\\ \iff& -\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\leq \mu-\overline{X}\leq \sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\\ \iff& \overline{X}-\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\leq \mu\leq \overline{X}+\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\ .\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}-\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\leq \mu\leq \overline{X}+\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha) \right)=\alpha\ .$$

このように，標本平均を表す確率変数 $\overline{X}$ と不偏分散を表す確率変数 U とについて，

$$\overline{X}-\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\leq \mu\leq \overline{X}+\sqrt{\frac{U}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)$$

となる確率は α です．故に，標本の平均 $\overline{x}$ 及び不偏分散 u に対して，区間

$$\left[\overline{x}-\sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}(1-\alpha),\ \overline{x}+\sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\right]$$

が母平均値 μ の信頼度 α の信頼区間です．

公式9.3　実数 α について $0<\alpha<1$ とする．正規母集団から無作為抽出した大きさ n （$n\geq 2$）の正規標本の平均 $\overline{x}$ 及び不偏分散 u に対して，母平均の信頼度 α の信頼区間は

$$\left[\overline{x}-\sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}(1-\alpha),\ \overline{x}+\sqrt{\frac{u}{n}}t_{n-1}(1-\alpha)\right]$$

で与えられる．

例題 9.3　正規母集団から無作為抽出した大きさ 20 の標本の平均が 70 で不偏分散が 30 であるとする．母平均の信頼度 95% の信頼区間を求める．

$$\begin{aligned}\left[70-\sqrt{\frac{30}{20}}t_{19}(0.05),\ 70+\sqrt{\frac{30}{20}}t_{19}(0.05)\right] &\fallingdotseq \left[70-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 2.093,\ 70+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 2.093\right]\\ &\fallingdotseq [67.44, 72.56]\ .\end{aligned}$$

問題 9.3　正規母集団から無作為抽出した大きさ 30 の標本の平均が 80 で不偏分散が 20 であるとします．母平均の信頼度 99% の信頼区間を求めなさい．