## §9.4　正規母集団の母平均の仮説検定

小標本のときつまり標本が大きくないときにも適用できる母平均の仮説検定について述べます．但し，以下の方法が適用できるのは母集団が正規母集団であるときに限ります．

正規母集団の母平均を $\mu$ とおきます（母平均 $\mu$ の値は分かりません）．与えられた実数 $m$ に対して仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討します．正規母集団から無作為抽出された大きさ $n$（$n \geq 2$）の正規標本の，平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおき，不偏分散を表す確率変数を $U$ とおきます．定理9.2.5より，確率変数 $\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従います．しかし，母平均 $\mu$ は未知ですから，$\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできません．そこで，$\mu$ を与えられた実数 $m$ で置き換えた確率変数

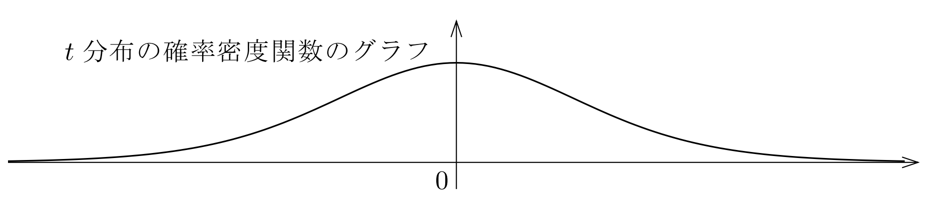
$$T=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)$$

を検定統計量とします．0 に近い正の実数 $\alpha$ を有意水準とします．

仮説 $\mu \neq m$ を検討します．帰無仮説 $\mu = m$ を立てます．検定統計量 $T=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)$ について，

$$\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)=T\ .$$

よって検定統計量 $T$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従います．

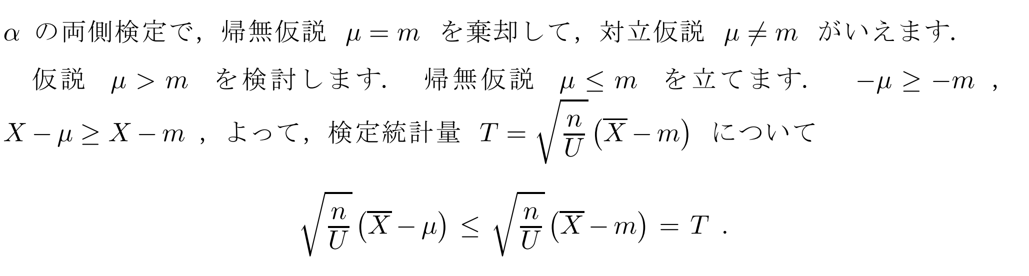



検定統計量 $T$ の実現値が 0 から離れるほど帰無仮説 $\mu = m$ は疑わしくなります．そこで，$T$ の実現値と 0 との間の間隔，つまり $T$ の実現値の絶対値が，ある基準値以上のとき帰無仮説を棄却します．その基準値を考えます．帰無仮説 $\mu = m$ より，$T=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従うので，定理9.2.7より，$a \geq 0$ である各実数 $a$ について，

$$\mathrm{P}(\ |T| \geq a\ ) = \alpha \iff a = t_{n-1}(\alpha)\ ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\ |T| \geq t_{n-1}(\alpha)\ ) = \alpha\ .$$




検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について，$|t| \geq t_{n-1}(\alpha)$ のときに限り，つまり $t \leq -t_{n-1}(\alpha)$ または $t \geq t_{n-1}(\alpha)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu = m$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します．棄却域は区間の合併

$$(-\infty, -t_{n-1}(\alpha)] \cup [t_{n-1}(\alpha), \infty)$$

です．棄却域が数直線上の左右両側の部分にあるのでこの検定は両側検定です．

結局，検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $|t| \geq t_{n-1}(\alpha)$ のときに限り，有意水準 $\alpha$ の両側検定で，帰無仮説 $\mu = m$ を棄却して，対立仮説 $\mu \neq m$ がいえます．

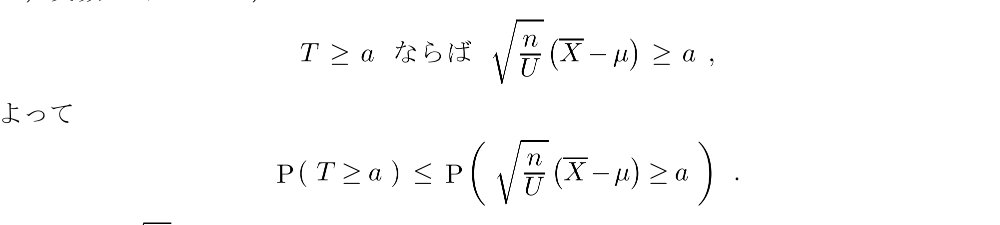
仮説 $\mu > m$ を検討します．帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てます．$-\mu \geq -m$，$X-\mu \geq X-m$，よって，検定統計量 $T=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)$ について

$$\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)=T\ .$$

確率変数 $\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は $t$ 分布に従うので，

$$\mathrm{E}[T] \leq \mathrm{E}\left[\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right] = 0\ .$$

検定統計量 $T$ の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになります．




$T$ の実現値の分布の中心は 0 以下です．$T$ の実現値の分布の中心が 0 よりどれぐらい小さいか分かりませんから，$T$ の実現値が 0 よりいくら小さくても帰無仮説が疑わしいとはいえません．しかし，$T$ の実現値が 0 より大分大きいとき帰無仮説は疑わしいといえます．そこで，$T$ の実現値がある正の基準値以上のとき帰無仮説を棄却します．その基準値を考えます．帰無仮説 $\mu \leq m$ より $\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \geq T$ なので，実数 $a$ について，

$$T \geq a \ \text{ならば}\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \geq a\ ,$$

よって

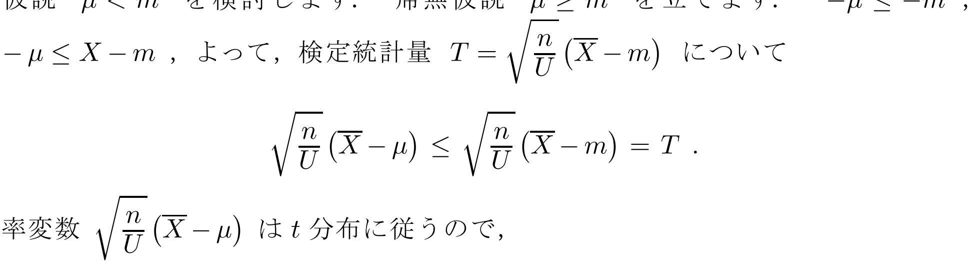
$$\mathrm{P}(\ T \geq a\ ) \leq \mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \geq a\ \right)\ .$$

確率変数 $\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従うので，定理9.2.7より，

$$\mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \geq a\ \right) = \alpha \iff a = t_{n-1}(2\alpha)\ ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\ T \geq t_{n-1}(2\alpha)\ ) \leq \mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \geq t_{n-1}(2\alpha)\ \right) = \alpha\ .$$




検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $t \geq t_{n-1}(2\alpha)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu \leq m$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します．棄却域は区間 $[t_{n-1}(2\alpha), \infty)$ です．棄却域が数直線上の右側の部分にあるのでこの検定は右側検定です．

結局，検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $t \geq t_{n-1}(2\alpha)$ のときに限り，有意水準 $\alpha$ の右側検定で，帰無仮説 $\mu \leq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえます．

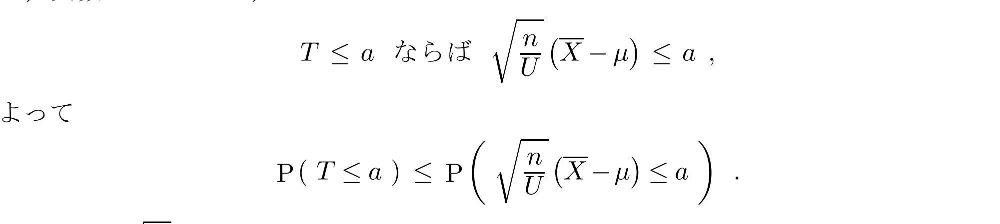
仮説 $\mu < m$ を検討します．帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てます．$-\mu \leq -m$，$X-\mu \leq X-m$，よって，検定統計量 $T=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)$ について

$$\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)=T\ .$$

確率変数 $\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は $t$ 分布に従うので，

$$\mathrm{E}[T] \geq \mathrm{E}\left[\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right] = 0\ .$$

検定統計量 $T$ の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになります．




$T$ の実現値の分布の中心は 0 以上です．$T$ の実現値の分布の中心が 0 よりどれぐらい大きいか分かりませんから，$T$ の実現値が 0 よりいくら大きくても帰無仮説が疑わしいとはいえません．しかし，$T$ の実現値が 0 より大分小さいとき帰無仮説は疑わしいといえます．そこで，$T$ の実現値がある負の基準値以下のとき帰無仮説を棄却します．その基準値を考えます．帰無仮説 $\mu \geq m$ より $\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq T$ なので，実数 $a$ について，

$$T \leq a \ \text{ならば}\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq a\ ,$$

よって

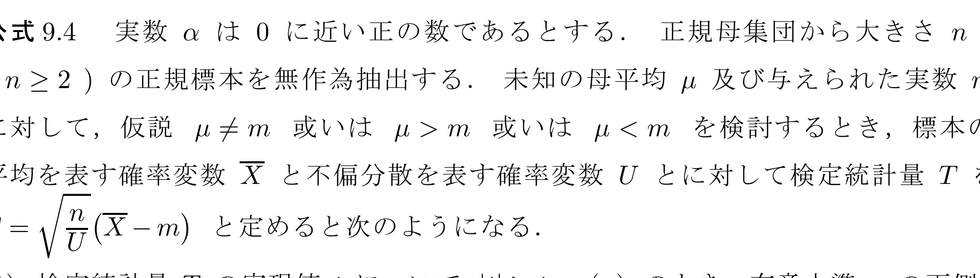
$$\mathrm{P}(\ T \leq a\ ) \leq \mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq a\ \right)\ .$$

確率変数 $\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従うので，定理9.2.7より，

$$\mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq a\ \right) = \alpha \iff a = -t_{n-1}(2\alpha)\ ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\ T \leq -t_{n-1}(2\alpha)\ ) \leq \mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq -t_{n-1}(2\alpha)\ \right) = \alpha\ .$$




検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $t \leq -t_{n-1}(2\alpha)$ のときに限り，帰無仮説 $\mu \geq m$ は非常に疑わしいと考えてこれを棄却します．棄却域は区間 $(-\infty, -t_{n-1}(2\alpha)]$ です．棄却域が数直線上の左側の部分にあるのでこの検定は左側検定です．

結局，検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $t \leq -t_{n-1}(2\alpha)$ のときに限り，有意水準 $\alpha$ の左側検定で，帰無仮説 $\mu \geq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえます．

まとめると次のようになります．

**公式 9.4**　実数 $\alpha$ は 0 に近い正の数であるとする．正規母集団から大きさ $n$（$n \geq 2$）の正規標本を無作為抽出する．未知の母平均 $\mu$ 及び与えられた実数 $m$ に対して，仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討するとき，標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}$ と不偏分散を表す確率変数 $U$ とに対して検定統計量 $T$ を $T=\sqrt{\frac{n}{U}}\left(\overline{X}-m\right)$ と定めると次のようになる．

(1) 検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $|t| \geq t_{n-1}(\alpha)$ のとき，有意水準 $\alpha$ の両側検定で，帰無仮説 $\mu = m$ は棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる．

(2) 検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $t \geq t_{n-1}(2\alpha)$ のとき，有意水準 $\alpha$ の右側検定で，帰無仮説 $\mu \leq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる．

(3) 検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $t \leq -t_{n-1}(2\alpha)$ のとき，有意水準 $\alpha$ の左側検定で，帰無仮説 $\mu \geq m$ は棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえる．

$\boxed{\text{例題 9.4.1}}$　ある工場で製造された大量の製品の中から20個の製品を無作為に抽出して重量を測定すると，20個の重量の平均値が 71.8g で不偏分散が $15\mathrm{g}^2$ であったとする．この工場で製造された製品の重量は正規分布に従うものとする．この工場で製造された製品全体の重量の平均値が 70g でないといえるかどうか，有意水準 5% で仮説検定する．

この工場で製造された製品全体の重量の平均値を $\mu$（単位は g）とおく．正規母集団から抽出した大きさ 20 の標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}$（単位は g）及び不偏分散を表す確率変数 $U$（単位は $\mathrm{g}^2$）に対して，確率変数 $\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 19 の $t$ 分布に従う．

母平均 $\mu$ について $\mu \neq 70$ かどうか検討するので，帰無仮説 $\mu = 70$ を立てる．検定統計量 $T$ を $T=\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-70\right)$ と定める．

$$\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)=\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-70\right)=T\ .$$

この確率変数は $t$ 分布に従うので，検定統計量 $T$ の実現値が 0 から離れるほど帰無仮説 $\mu = 70$ は疑わしい．よって両側検定を行う．確率変数 $\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 19 の $t$ 分布に従うので

$$\mathrm{P}\left(\ \left|\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right| \geq 2.093\ \right) = 5\%\ ,$$

よって

$$\mathrm{P}(\ |T| \geq 2.093\ ) = 5\%\ .$$

検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $|t| \geq 2.093$ のときに限り，有意水準 5% の両側検定 で，帰無仮説 $\mu = 70$ を棄却できて対立仮説 $\mu \neq 70$ がいえる．

いま，$\overline{X}$ の実現値が 71.8 で $U$ の実現値は 15 なので，検定統計量 $T=\sqrt{\frac{20}{U}}\left(\overline{X}-70\right)$ の実現値 $t$ は

$$t=\sqrt{\frac{20}{15}}(71.8-70) \fallingdotseq 2.078\ .$$

従って帰無仮説 $\mu = 70$ は棄却できない．つまり，有意水準 5% の両側検定で，この工場で製造された製品全体の重量の平均値が 70 でないとはいえない．

$\boxed{\text{問題 9.4.1}}$　ある工場で製造された大量の製品の中から30個の製品を無作為に抽出して重量を測定すると，30個の重量の平均値が 78.2g で不偏分散が $22\mathrm{g}^2$ であったとします．この工場で製造された製品の重量は正規分布に従うものとします．この工場で製造された製品全体の重量の平均値が 80g でないといえるかどうか，有意水準 5% で仮説検定しなさい．

$\boxed{\text{例題 9.4.2}}$　正規母集団から無作為に抽出した大きさ 30 の標本の平均が 48.4 で不偏分散が 12 であったとする．母平均が 50 より小さいといえるかどうか，有意水準 1% で仮説検定する．

母平均を $\mu$ とおく．正規母集団から抽出した大きさ 30 の標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}$ 及び不偏分散を表す確率変数 $U$ に対して，確率変数 $\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は自由度 29 の $t$ 分布に従う．

母平均 $\mu$ について $\mu < 50$ ではないかと考えているので，帰無仮説 $\mu \geq 50$ を立てる．検定統計量 $T$ を $T=\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-50\right)$ と定める．

$$\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq \sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-50\right)=T\ .$$

確率変数 $\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ は $t$ 分布に従うので，$\mathrm{E}[T] \geq \mathrm{E}\left[\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)\right] = 0$．従って検定統計量 $T$ の実現値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\mu \geq 50$ は疑わしい．よって左側検定を行う．確率変数 $\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right)$ が自由度 29 の $t$ 分布に従うので

$$\mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq -2.462\ \right) = 1\%\ .$$

$\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq T$ より，$T \leq -2.462$ ならば $\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq -2.462$ なので，

$$\mathrm{P}(\ T \leq -2.462\ ) \leq \mathrm{P}\left(\ \sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-\mu\right) \leq -2.462\ \right) = 1\%\ .$$

故に，検定統計量 $T$ の実現値 $t$ について $t \leq -2.462$ のときに限り，有意水準 1% の左側検定 で，帰無仮説 $\mu \geq 50$ を棄却されるので，対立仮説 $\mu < 50$ がいえる．

いま，$\overline{X}$ の実現値が 48.4 で $U$ の実現値が 12 なので，検定統計量 $T=\sqrt{\frac{30}{U}}\left(\overline{X}-50\right)$ の実現値 $t$ は

$$t=\sqrt{\frac{30}{12}}\left(48.4-50\right) \fallingdotseq -2.530\ .$$

従って帰無仮説 $\mu \geq 50$ は棄却される．つまり，有意水準 1% の左側検定で，母平均は 50 より小さいといえる．

$\boxed{\text{問題 9.4.2}}$　正規母集団から無作為に抽出した大きさ 40 の標本の平均が 61.7 で不偏分散が 20 であったとします．母平均が 60 より大きいといえるかどうか，有意水準 1% で仮説検定しなさい．